



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.











**Zeitschrift**  
für  
**Mathematik und Physik**

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**XXIII. Jahrgang.**

**Mit 6 lithographirten Tafeln.**

*[Faint, illegible text, possibly a library stamp or a very faded line of text.]*

**LEIPZIG,**

**Verlag von B. G. Teubner.**

**1878.**

192932

YWA 881 0807MAY2

Druck von B. G. Teubner in Dresden.



	Seite
Ueber die Polarflächen der windschiefen Flächen dritter Ordnung. Von Prof. Dr. Hochheim . . . . .	308
Fortsetzung der Abhandlung . . . . .	345
Synthetischer Beweis, dass jede ebene Curve dritter Ordnung durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden kann. Von Oberl. Milinowski . . . . .	327
Ueber Tangenten und Normalen an Curvensystemen. Von O. Schlömilch . .	337
Ueber die Verallgemeinerung einer Erzeugungsart der Curven zweiten Grades. Von Oberl. V. Schlegel . . . . .	402
Einfachste Formel für das Volumen des Prismatoids. Von Prof. J. K. Becker	412
Geometrische Untersuchungen. (I. Das Dreieck betr.) Von Seligm. Kantor .	414

### Mechanik und Molecularphysik.

Zu Riemann's Gravitationstheorie. Von Oberl. G. Helm . . . . .	261
Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung. Von Prof. Dr. Wittwer . . . . .	286
Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoids infolge der Anziehung eines weit entfernten Punktes. Von Dr. Giesen . . . . .	380

### Optik.

Eine neue Messungsmethode der Constanten optisch ein- und zweiaxiger Krystalle. Von Prof. Dr. Matthiessen . . . . .	187
Ueber die Theorie der Reflexion und Refraction des Lichtes. III. Mitthlg. Von Dr. Lorentz . . . . .	197

### Elektricität und Magnetismus.

Ueber das Problem der Stromverzweigung in einer ebenen Platte. Von Dr. Chwolson . . . . .	47
Neue Methode, um den Widerstand einer galvanischen Batterie zu messen. Von H. Discher . . . . .	138





sätze der kinematischen Geometrie hier kurz vorangestellt werden; dieselben entsprechen den ausführlichen Sätzen in der erwähnten Abhandlung von Aronhold und enthalten nur das zum Verständniss der folgenden Untersuchungen Nothwendige.

1) In einem starren ebenen System, welches sich in seiner eigenen Ebene beliebig bewegt, giebt es in jedem Augenblicke einen und nur einen, aber beständig wechselnden Punkt  $\mathfrak{P}$ , um welchen das System ohne Gleitung rotirt; dieser Punkt  $\mathfrak{P}$  heisst der momentane Pol der Ebene.

2) Während der Bewegung des ebenen Systems beschreibt jeder Punkt  $P$  desselben auf der festen Ebene eine Bahn, welche die Roulette dieses Punktes genannt werden soll.  $P$  heisst der beschreibende Punkt. Alle Normalen der in der festen Ebene beschriebenen Curvenelemente schneiden sich in jedem Augenblicke in einem Punkte, nämlich im momentanen Pol des Systems.

Der Pol ändert seine Lage fortwährend, sowohl in der beweglichen, als in der festen Ebene, und beschreibt infolge dessen in beiden Ebenen Curven, welche die Polbahnen genannt werden.

3) Bei der Bewegung des ebenen Systems rollt die Polbahn der beweglichen Ebene auf der Polbahn der festen Ebene, ohne zu gleiten.

Es seien  $P$  und  $Q$  die augenblicklichen Lagen zweier Punkte des beweglichen Systems, ferner  $m$  und  $n$  die Krümmungsmittelpunkte der augenblicklich von  $P$  und  $Q$  beschriebenen Bogenelemente beider Rouletten, so schneiden sich nach 2)  $Pm$  und  $Qn$  im momentanen Pol  $\mathfrak{P}$ . Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  die beiden Winkel, welchen die Linien  $\mathfrak{P}P$  und  $\mathfrak{P}Q$  mit der gemeinschaftlichen Tangente der Polbahnen im Punkte  $\mathfrak{P}$  bilden. Bezeichnet man noch die Strecken  $\mathfrak{P}P$  und  $\mathfrak{P}Q$ , also die Entfernungen der beschreibenden Punkte vom Pole, mit  $r$  und  $s$ , ferner die entsprechenden Entfernungen der Krümmungsmittelpunkte vom Pole,  $\mathfrak{P}m$  und  $\mathfrak{P}n$ , mit  $r_1$  und  $s_1$ , so hat man zwischen diesen Grössen folgende fundamentale Relation:

$$4) \quad \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \sin \alpha = \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1} \right) \sin \beta = \text{const.}$$

Hierbei sind  $r$  und  $r_1$ , ebenso  $s$  und  $s_1$  algebraisch zu nehmen, und zwar haben  $r$  und  $r_1$  dasselbe Vorzeichen, wenn  $\mathfrak{P}$  zwischen  $P$  und  $m$  liegt, dagegen entgegengesetzte Vorzeichen, wenn der Krümmungsmittelpunkt  $m$  und  $P$  nach derselben Richtung von  $\mathfrak{P}$  aus liegen.

Als specieller Fall ergibt sich der Savary'sche Satz\*:

$$5) \quad \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \sin \alpha = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1},$$

\* Man vergl. die Abhandlung von Hennig, Crelle's Journal Bd. 65.



dieses gewöhnlich leicht bestimmbaren Punktes können die Krümmungsmittelpunkte einer Roulette unter Berücksichtigung von 6) durch folgende einfache Construction, bei welcher die Bezeichnung aus 7) benützt ist, gefunden werden:

10) Man verbinde den beschreibenden Punkt  $P$  mit dem Wendepol  $O$  und lege durch den Punkt  $J$ , in welchem diese Verbindungslinie die im Pole  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{P}P$  errichtete Senkrechte schneidet, eine Parallele zur gemeinschaftlichen Normale  $\mathfrak{P}O$  der Polbahn; diese Parallele schneidet  $P\mathfrak{P}$  im Krümmungsmittelpunkte  $m$ .

11) Wenn ein Punkt des beweglichen Systems eine Gerade beschreibt, so geht diese durch den Wendepol.

Es sei eine beliebige Curve gegeben, welche von den Strahlen, die von einem festen Punkte  $P$  ausgehen, getroffen wird. Irgend ein Strahl treffe einen Punkt  $\mathfrak{P}$  dieser Curve; die Länge des Einfallstrahles  $P\mathfrak{P}$  sei gleich  $r$ . Zeichnet man eine zweite Curve, welche symmetrisch zur gegebenen in Bezug auf die Tangente im Punkte  $\mathfrak{P}$  derselben liegt (also das Spiegelbild der Curve in Bezug auf diese Tangente), und bestimmt man den zu  $P$  symmetrisch gelegenen Punkt  $P_1$  in der zweiten Curve, so bilden  $P\mathfrak{P}$  und  $P_1\mathfrak{P}$  mit der Tangente gleiche Winkel; die Verlängerung von  $P_1\mathfrak{P}$  ist demnach der reflectirte Strahl (vergl. Taf. I, Fig. 3). Lässt man die zweite Curve auf der gegebenen abrollen, so durchwandert der Einfallspunkt  $\mathfrak{P}$  die letztere und ist stets der momentane Pol für die Bewegung. Der Punkt  $P_1$  bleibt dabei immer in symmetrischer Lage zu  $P$  in Bezug auf die augenblickliche Tangente beider Curven; die Linien  $P_1\mathfrak{P}$  sind nach 2) stets die Normalen der vom Punkte  $P_1$  beschriebenen Roulette; die Verlängerungen dieser Linien, d. h. die reflectirten Strahlen, umhüllen demnach die Evolute dieser Roulette. Aus dieser Betrachtung ergibt sich der folgende Hauptsatz:

12) Die zu einem gegebenen strahlenden Punkte  $P$  gehörige kaustische Linie einer Curve ist die Evolute derjenigen Roulette, welche ein Punkt  $P_1$  beschreibt, der mit einer zweiten, der gegebenen congruenten Curve in symmetrischer Lage zu dem strahlenden Punkte  $P$  fest verbunden ist, während diese zweite auf der gegebenen so abrollt, dass sich beide Curven stets in entsprechenden Punkten berühren.\*

Mit Hilfe dieses Satzes sind im Folgenden die kaustischen Linien für den Kreis, für die Parabel und die Ellipse behandelt. Damit sind zugleich die wichtigsten Bestimmungen der zugehörigen Rouletten und, infolge des Zusammenhanges zwischen diesen und den Fusspunkt-

\* *Salmon, Higher plane curves 1852 No. 123. Grosse, Dissertation 1872.*









men und die Krümmungsmittelpunkte liegen auf demselben. Durch den Werth  $r = \sqrt{\varrho^2 - z^2}$  sind zwei Strahlen zu beiden Seiten dieses Durchmessers bestimmt.

Einem jeden solchen Maximum oder Minimum der Krümmung der Roulette muss ein Rückkehrpunkt der Evolute entsprechen; es folgt hieraus der Satz:

22) Die kaustische Linie des Kreises hat vier Rückkehrpunkte, von denen zwei in dem durch den strahlenden Punkt gehenden Durchmesser oder dessen Verlängerung, die beiden anderen symmetrisch zu beiden Seiten desselben liegen.

$\alpha$ ) Rückkehrpunkt für den Einfallsstrahl von der Länge  $r = \varrho - z$ .

Da dieser Strahl mit der Tangente im Einfallspunkte einen rechten Winkel bildet, so erhält man für die Länge  $r_1$  des reflectirten Strahles bis zum Berührungspunkte mit der kaustischen Linie nach dem Savary'schen Satze 5) die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho - z} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{\varrho},$$

d. h.  $\varrho$  ist das harmonische Mittel zwischen  $\varrho - z$  und  $r_1$ , oder:

23) Der erste Rückkehrpunkt der Brennnlinie und der strahlende Punkt  $P$  theilen denjenigen Radius, auf welchem  $P$  liegt, harmonisch.

Rückt  $P$  in die Mitte des Radius, so liegt der Rückkehrpunkt im Unendlichen. Die auf einem Radius gelegenen strahlenden Punkte bilden mit den zugehörigen ersten Rückkehrpunkten eine involutorische Punktreihe.

$\beta$ ) Rückkehrpunkt für den Einfallsstrahl von der Länge  $r = \varrho + z$ .

Wird die Länge des reflectirten Strahles bis zu diesem Rückkehrpunkte mit  $r_2$  bezeichnet, so ergibt der Savary'sche Satz

$$\frac{1}{\varrho + z} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\varrho},$$

d. h.:

24) Der zweite Rückkehrpunkt der Brennnlinie und der strahlende Punkt  $P$  theilen den Radius, dessen Rückverlängerung durch  $P$  geht, harmonisch.

$\gamma$ ) Die Rückkehrpunkte für die Einfallsstrahlen von der Länge  $r = \sqrt{\varrho^2 - z^2}$ .

Aus dem Werthe für  $r$  ist ersichtlich, dass derjenige Strahl, dessen reflectirter Strahl durch einen dieser beiden Rückkehrpunkte geht, senkrecht zu dem durch  $P$  gehenden Radius stehen muss. Die Länge  $r_3$  des reflectirten Strahles bis zum Rückkehrpunkte ist in diesem Falle nach 20)













Wie schon oben erwähnt wurde, ist das Vorkommen einzelner Fälle abhängig von der Excentricität der Ellipse. Die Fälle III, IV und V sind immer möglich, selbst wenn  $c = 0$ , die Ellipse also in einen Kreis übergegangen ist; die Resultate stimmen dann mit den früher für den Kreis direct gefundenen überein. Ist  $c > b$ , so sind alle fünf Fälle möglich; ist  $c = b$ , so kann Fall I nicht vorkommen; ist  $c < b$ , so können die Fälle I und II nicht stattfinden. Es soll mit Rücksicht auf die verschiedenen Formen der Ellipse hier noch besonders folgender Fall erörtert werden:

58) Der strahlende Punkt liegt im Mittelpunkte der Ellipse; es ist also  $z = 0$ .

A. Es sei  $c > b$ . Die Brennnlinie ist unter dieser Voraussetzung ein specieller Fall der unter Fall I betrachteten Curven. Die zur Bestimmung der Ausgangspunkte der Asymptoten dienende Gleichung 47) geht, wenn  $z = 0$  gesetzt wird, über in die einfachere

$$x^2 = \frac{a^2(2c^2 - a^2)}{3c^2}, \text{ also ist } y^2 = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}.$$

Die beiden Werthe von  $x$  unterscheiden sich demnach hier nur durch die Vorzeichen, d. h. die vier Asymptoten liegen in diesem Falle auch zu je zweien symmetrisch zur kleinen Axe; ihre Schnittpunkte liegen also einerseits in der grossen und andererseits in der Verlängerung der kleinen Axe. Die Entfernungen der Schnittpunkte der Asymptoten mit der grossen Axe vom Mittelpunkte der Ellipse sind hier nach 56)

$$s_1 = \pm \frac{ac\sqrt{6c^2 - 3a^2}}{a^2 + c^2}$$

und die Entfernungen der Schnittpunkte mit der kleinen Axe vom Mittelpunkte sind

$$s_2 = \pm \frac{c\sqrt{3a^4 - 3c^4}}{2c^2 - a^2}.$$

Die Axen der Ellipse, resp. die Verlängerungen, sind zugleich Tangenten in den Rückkehrpunkten der Brennnlinie. Zwei Rückkehrpunkte liegen innerhalb der Ellipse auf der grossen Axe; ihre Entfernungen von den Scheiteln sind nach 54)

$$p = q = \frac{ab^2}{a^2 + c^2} = \frac{ab^2}{2a^2 - b^2}.$$

Die beiden anderen liegen ausserhalb der Ellipse in den Verlängerungen der kleinen Axe; denn ihre Entfernungen von den Endpunkten der letzteren sind nach 53)

$$r_0 = \frac{a^2b}{a^2 - 2c^2},$$

also hier negativ. Die in den Entfernungen  $\pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$  vom Mittel-

punkt zur kleinen Axe parallel liegenden Geraden sind die Scheiteltan-



Strecke kein Rückkehrpunkt liegt. Setzt man nacheinander die Abscisse des Einfallspunktes gleich  $a$  und gleich  $-a$ , so erhält man die beiden Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$ , welche zu den in der grossen Axe liegenden Rückkehrpunkten der Brennnlinie gehören:

$$R_1 = \frac{2a(a-z)^2}{a^2 + c^2 - 2az} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{2a(a+z)^2}{a^2 + c^2 + 2az}.$$

Setzt man andererseits  $x = z$ , so erhält man den Krümmungsradius  $R_3$ , welcher zu einem der beiden anderen Rückkehrpunkte gehört:

$$R_3 = \frac{2ab^3\sqrt{a^2 - z^2}}{2a^2b^2 - a^4 + c^2z^2}.$$

Ist  $z > \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$ , so liegt zwischen einem auf der Axe befindlichen Rückkehrpunkte und je einem der beiden anderen Punkte ein endliches Bogenstück, dessen Länge gleich dem absoluten Werthe von  $R_2 - R_3$  ist. Ist die kaustische Linie eine geschlossene Curve (Fall III), so ist der Umfang  $u$  derselben gleich dem absoluten Werthe von  $4R_3 - 2R_1 - 2R_2$ , also

$$\pm \frac{u}{8a} = \frac{b^3\sqrt{a^2 - z^2}}{a^4 - 2a^2c^2 + c^2z^2} - \frac{(a^2 + z^2)(a^2 + c^2) - 4a^2z^2}{(a^2 + c^2)^2 - 4a^2z^2}.$$

Liegt der strahlende Punkt im Scheitel der reflectirenden Ellipse, ist also  $z = a$ , so hat die zugehörige kaustische Linie hiernach den Umfang

$$\frac{16a^3}{3a^2 + c^2}.$$



$$f_1(y_1) = a_0 \alpha^n y_1^n + a_1 \alpha^{n-1} y_1^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} y_1^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha y_1 + a_n = 0.$$

Substituirt man nun in  $f_1(y_1)$  für  $y_1$  der Reihe nach die Werthe

$$1, \quad 1,1, \quad 1,2, \quad 1,3, \quad \dots \quad 1,9, \quad 2,$$

so muss die Function  $f_1(y_1)$  in dieser Reihe wenigstens einmal das Zeichen wechseln. Einmal wird dieses der Fall sein, wenn zwischen  $\alpha$  und  $2\alpha$  nur eine Wurzel der gegebenen Gleichung liegt; liegen dagegen zwischen diesen Grenzen mehrere Wurzeln der gegebenen Gleichung, so muss  $f_1(y_1)$  bei Substitution der genannten Reihe von Werthen für  $y_1$  mehrmals einen Zeichenwechsel aufweisen. Im letztern Falle wollen wir der Bestimmtheit wegen annehmen, man habe die  $\alpha$  zunächstliegende Wurzel der gegebenen Gleichung zu finden. Durch die oben angegebenen

Substitutionen findet man also immer für  $y_1$  zwei Werthe  $1 + \frac{\beta}{10}$  und  $1 + \frac{\beta+1}{10}$  dergestalt, dass

$$f_1\left(1 + \frac{\beta}{10}\right) = \pm, \quad f_1\left(1 + \frac{\beta+1}{10}\right) = \mp,$$

also

$$1 + \frac{\beta}{10} < y_1 < 1 + \frac{\beta+1}{10}$$

ist. Im Falle, dass sich mehrere derartige Werthepaare finden, nehmen wir nach den obigen Festsetzungen das kleinste. Wir setzen dann weiter

$$y_1 = \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) y_2,$$

wo, für  $\gamma < 10$ ,  $y_2$  nothwendig die Form haben muss

$$y_2 = 1 + \frac{\gamma}{100} + \dots$$

Denn wäre

$$y_2 = 1 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\gamma}{100} + \dots,$$

so müsste

$$y_1 = 1 + \frac{\beta + \beta_1}{10} + \dots$$

sein, was aber mit den obigen Annahmen unvereinbar ist. Wenn man nun den für  $y_1$  angenommenen Ausdruck in die obige erste transformirte Gleichung einsetzt, so erhalten wir die zweite transformirte Gleichung

$$\begin{aligned} f_2(y_2) = & a_0 \alpha^n \left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^n y_2^n + a_1 \alpha^{n-1} \left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^{n-1} y_2^{n-1} \\ & + a_2 \alpha^{n-2} \left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^{n-2} y_2^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) y_2 + a_n = 0. \end{aligned}$$

Substituirt man nun für  $y_2$  der Reihe nach die Werthe

$$1, \quad 1,01, \quad 1,02, \quad \dots \quad 1,09, \quad 1,1,$$

so muss die Function  $f_2(y_2)$  irgendwo in derselben einen Zeichenwechsel erleiden (oder auch, im Falle die gegebene Gleichung nahe beisammen-



liegende Wurzeln hat, mehrere Zeichenwechsel, was wir nach dem Obigen nicht ferner zu berücksichtigen brauchen). Angenommen, man fände

$$f_2\left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) = \pm, \quad f_2\left(1 + \frac{\gamma+1}{100}\right) = \mp,$$

also

$$1 + \frac{\gamma}{100} < y_2 < 1 + \frac{\gamma+1}{100}.$$

Setzen wir dann weiter

$$y_2 = \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) y_3,$$

wo  $y_3$  nothwendig von der Form

$$1 + \frac{\delta}{1000} + \dots$$

ist, so erhalten wir durch Substitution in  $f_2(y_2) = 0$  die dritte transformirte Gleichung

$$\begin{aligned} f_3(y_3) &= a_0 \alpha^n \left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^n \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^n y_3^n + a_1 \alpha^{n-1} \left(1 + \frac{\beta}{10}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right)^{n-1} y_3^{n-1} \\ &+ \dots + a_{n-1} \alpha \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) y_3 + a_n = 0. \end{aligned}$$

Indem man für  $y_3$  nachstehende Werthereihe substituirt:

$$1, \quad 1,001, \quad 1,002, \quad \dots \quad 1,009, \quad 1,01,$$

finde man etwa

$$f_3\left(1 + \frac{\delta}{1000}\right) = \pm, \quad f_3\left(1 + \frac{\delta+1}{1000}\right) = \mp,$$

also

$$1 + \frac{\delta}{1000} < y_3 < 1 + \frac{\delta+1}{1000}.$$

Man setze dann weiter

$$y_3 = \left(1 + \frac{\delta}{1000}\right) y_4,$$

wodurch man eine vierte transformirte Gleichung erhält u. s. w. Wie man so fortfahren kann, ist klar. Man erhält also durch successive Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= \alpha y_1, \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) y_2 \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) y_3 \\ &= \alpha \left(1 + \frac{\beta}{10}\right) \left(1 + \frac{\gamma}{100}\right) \left(1 + \frac{\delta}{1000}\right) y_4 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Der letzte Coefficient der aufeinander folgenden transformirten Gleichungen bleibt stets ungeändert; die vorhergehenden nähern sich, wie aus dem Obigen hervorgeht, immer mehr bestimmten Grenzwerten. Wenn dieselben bei der beabsichtigten Annäherung diese Grenzwerte erreicht

haben, so muss die algebraische Summe aller Coefficienten der Null gleich sein, indem dann für die erstrebte Genauigkeit die eine Wurzel der letzten transformirten Gleichung sich nicht mehr von Eins unterscheidet. Man braucht aber die Rechnung nicht bis dahin fortzusetzen; wenn man bis zur  $m^{\text{ten}}$  transformirten Gleichung

$$f_m(y_m) = b_0 y_m^n + b_1 y_m^{n-1} + b_2 y_m^{n-2} + \dots + b_{n-1} y_m + b_n = 0$$

gekommen ist, in welcher  $y_m$  schon sehr nahe an 1 liegt, so setze man

$$y_m = 1 + z,$$

wo jetzt  $z$  ein sehr kleiner positiver echter Bruch ist. Vernachlässigt man dann alle höheren Potenzen von  $z$ , so kommt

$$z = - \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n}{n b_0 + (n-1) b_1 + \dots + b_{n-1}}.$$

Die Coefficienten der transformirten Gleichungen sind, wie die Ansicht des Obigen lehrt, sämmtlich Producte, und zwar bilden sich die Coefficienten jeder folgenden transformirten Gleichung aus denen der vorhergehenden durch Hinzufügung eines neuen Factors, welcher Umstand, da man sich der logarithmischen Tafeln bedienen kann, die Berechnung sehr erleichtert. Da weiter für die höheren transformirten Gleichungen die hinzukommenden Factoren immer näher an Eins rücken, so wird die Bildung derselben immer leichter, je höher die Ordnungszahl derselben steigt, da man für grosse  $m$  einfach setzen kann

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{10^m}\right)^p = 1 + \frac{p\varepsilon}{10^m}.$$

Besonders erleichtert würde die Auflösung der algebraischen Gleichungen nach dieser Methode, wenn man sich ein- für allemal eine Tafel berechnete, welche bis zu einer bestimmten Grenze die Werthe der aufeinander folgenden Potenzen und deren Logarithmen von folgenden Zahlen enthielte:

1,1,	1,2,	1,3,	... 1,9,
1,01,	1,02,	1,03,	... 1,09,
1,001,	1,002,	1,003,	... 1,009,
1,0001,	1,0002,	1,0003,	... 1,0009 u. s. w.

Läge etwa bei der  $m^{\text{ten}}$  transformirten Gleichung der Werth von  $y_m$  zwischen 1 und  $1 + \frac{1}{10^m}$ , so würde man selbstverständlich sofort zur Substitution der folgenden Werthereihe:

$$1 + \frac{1}{10^{m+1}}, \quad 1 + \frac{2}{10^{m+1}}, \quad \dots \quad 1 + \frac{9}{10^{m+1}}$$

schreiten; der der  $m^{\text{ten}}$  Gleichung entsprechende Factor in der Entwicklung von  $x$  fiele dann aus.

**Zahlenbeispiel.** Wir wollen nach dem auseinandergesetzten Verfahren die folgende, oft als Beispiel benutzte Gleichung



$$x = 2,094551,$$

was mit dem von Fourier gefundenen Werthe bis zur sechsten Decimale inclusive übereinstimmt.

## II. Entwicklung der Wurzeln einer algebraischen numerischen Gleichung in eine Kettenreihe.

Unter einer Kettenreihe verstehen wir einen Ausdruck von folgender Form:

$$a + \frac{b}{B} + \frac{c}{B^2} + \frac{d}{B^3} + \frac{e}{B^4} + \dots,$$

wo  $a, b, c, d, e, \dots B$  beliebige ganze positive Zahlen sind. Setzt man die Zahl  $B$ , die wir als die Basis der Kettenreihe bezeichnen wollen, gleich 10, so verwandelt der Ausdruck sich in einen gewöhnlichen Decimalbruch. Wir wollen nun sehen, wie man die reellen Wurzeln einer Gleichung in eine Kettenreihe mit beliebig gewählter Basis entwickeln kann. Die gegebene Gleichung sei wieder

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Die zu suchende Wurzel wollen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, immer als positiv annehmen. Man habe nun wieder durch Versuche gefunden, dass eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$  liege; wir setzen dann

$$x = \alpha + \frac{y_1}{B},$$

unter  $B$  die beliebig angenommene Basis der zu entwickelnden Kettenreihe verstanden, wo also  $y_1$  nothwendig kleiner als  $B$  sein muss. Setzt man diesen Ausdruck in die gegebene Gleichung und entwickelt die Function derselben nach der Taylor'schen Formel, so kommt

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f'(\alpha) \cdot \frac{y_1}{B} + \frac{1}{2!} f''(\alpha) \cdot \frac{y_1^2}{B^2} + \frac{1}{3!} f'''(\alpha) \cdot \frac{y_1^3}{B^3} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{n-1}(\alpha) \cdot \frac{y_1^{n-1}}{B^{n-1}} + \frac{1}{n!} f^n(\alpha) \cdot \frac{y_1^n}{B^n} = 0, \end{aligned}$$

wofür wir auch schreiben können

$$\begin{aligned} f_1(y_1) = \frac{1}{n!} f^n(\alpha) \cdot y_1^n + \frac{B}{(n-1)!} f^{n-1}(\alpha) \cdot y_1^{n-1} + \frac{B^2}{(n-2)!} f^{n-2}(\alpha) \cdot y_1^{n-2} + \dots \\ \dots + B^{n-1} f'(\alpha) \cdot y_1 + B^n f(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Dies ist die erste transformirte Gleichung, welche zur Bestimmung von  $y_1$  dient. Wir substituiren in dieselbe die Werthereihe 1, 2, ... bis  $B$ . Die Function  $f_1(y_1)$  muss zwischen diesen Grenzen einen Zeichenwechsel erleiden; wenn im Falle nahe beisammenliegender Wurzeln der gegebenen Gleichung in demselben Intervall mehrere Wechsel auftreten sollten, wollen wir der bestimmten Vorstellung wegen die kleinste Wurzel als die gesuchte annehmen. Gesetzt nun, der Zeichenwechsel trete ein zwischen  $y_1 = \beta$  und  $y_1 = \beta + 1$ ; wir setzen dann weiter



Wie schon oben erwähnt wurde, ist das Vorkommen einzelner Fälle abhängig von der Excentricität der Ellipse. Die Fälle III, IV und V sind immer möglich, selbst wenn  $c = 0$ , die Ellipse also in einen Kreis übergegangen ist; die Resultate stimmen dann mit den früher für den Kreis direct gefundenen überein. Ist  $c > b$ , so sind alle fünf Fälle möglich; ist  $c = b$ , so kann Fall I nicht vorkommen; ist  $c < b$ , so können die Fälle I und II nicht stattfinden. Es soll mit Rücksicht auf die verschiedenen Formen der Ellipse hier noch besonders folgender Fall erörtert werden:

58) Der strahlende Punkt liegt im Mittelpunkte der Ellipse; es ist also  $z = 0$ .

A. Es sei  $c > b$ . Die Brennnlinie ist unter dieser Voraussetzung ein specieller Fall der unter Fall I betrachteten Curven. Die zur Bestimmung der Ausgangspunkte der Asymptoten dienende Gleichung 47) geht, wenn  $z = 0$  gesetzt wird, über in die einfachere

$$x^2 = \frac{a^2(2c^2 - a^2)}{3c^2}, \text{ also ist } y^2 = \frac{a^4 - c^4}{3c^2}.$$

Die beiden Werthe von  $x$  unterscheiden sich demnach hier nur durch die Vorzeichen, d. h. die vier Asymptoten liegen in diesem Falle auch zu je zweien symmetrisch zur kleinen Axe; ihre Schnittpunkte liegen also einerseits in der grossen und andererseits in der Verlängerung der kleinen Axe. Die Entfernungen der Schnittpunkte der Asymptoten mit der grossen Axe vom Mittelpunkte der Ellipse sind hier nach 56)

$$s_1 = \pm \frac{ac\sqrt{6c^2 - 3a^2}}{a^2 + c^2}$$

und die Entfernungen der Schnittpunkte mit der kleinen Axe vom Mittelpunkte sind

$$s_2 = \pm \frac{c\sqrt{3a^4 - 3c^4}}{2c^2 - a^2}.$$

Die Axen der Ellipse, resp. die Verlängerungen, sind zugleich Tangenten in den Rückkehrpunkten der Brennnlinie. Zwei Rückkehrpunkte liegen innerhalb der Ellipse auf der grossen Axe; ihre Entfernungen von den Scheiteln sind nach 54)

$$p = q = \frac{ab^2}{a^2 + c^2} = \frac{ab^2}{2a^2 - b^2}.$$

Die beiden anderen liegen ausserhalb der Ellipse in den Verlängerungen der kleinen Axe; denn ihre Entfernungen von den Endpunkten der letzteren sind nach 53)

$$r_0 = \frac{a^2 b}{a^2 - 2c^2},$$

also hier negativ. Die in den Entfernungen  $\pm \frac{a}{c}\sqrt{2c^2 - a^2}$  vom Mittelpunkt zur kleinen Axe parallel liegenden Geraden sind die Scheiteltan-



Dies ist ein genauerer Werth für die Wurzel der fünften transformirten Gleichung. Einen noch weit mehr angenäherten aber kann man jetzt finden, wenn man in die zwei ersten Glieder jener Gleichung für  $y_5$  den vorigen Werth 5,1483 einsetzt; man erhält so

$$y_5^3 + 628350 y_5^2 = 16654546, \dots$$

und dadurch

$$111607907500 y_5 = 574591375000 - 16654546$$

oder

$$y_5 = \frac{574591375000 - 16654546}{111607907500} = 5,14815422.$$

Somit können wir endlich mit grosser Annäherung die gesuchte Wurzel der gegebenen Gleichung angeben:

$$x = 2 + \frac{9}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{5,14815422}{10^5} = 2,0945514815422;$$

es stimmt dieser Werth mit dem von Fourier gefundenen bis auf die zwölfte Decimale überein.

**Zweites Zahlenbeispiel.** Wir wollen wieder dieselbe Gleichung wie vorhin, als Basis der zu entwickelnden Kettenreihe dagegen jetzt eine grössere Zahl, etwa 40, nehmen. Wir setzen also

$$x = 2 + \frac{y_1}{40}$$

und erhalten die erste transformirte Gleichung

$$y_1^3 + 6 \cdot 40 \cdot y_1^2 + 10 \cdot 40^2 \cdot y_1 - 1 \cdot 40^3 = 0$$

oder

$$1) \quad f_1(y_1) = y_1^3 + 240 y_1^2 + 16000 y_1 - 64000 = 0.$$

Man findet aus derselben

$$3 < y_1 < 4,$$

so dass wir die Substitution zu machen haben

$$y_1 = 3 + \frac{y_2}{40}.$$

Zur Bildung der zweiten transformirten Gleichung berechnen wir nachstehende Zahlwerthe:

$$f_1(3) = -13813,$$

$$f'_1(3) = [3 y_1^2 + 480 y_1 + 16000]_3 = 17467,$$

$$f''_1(3) = [6 y_1 + 480]_3 = 498,$$

$$f'''_1(3) = 6.$$

Hiernach wird die zweite transformirte Gleichung

$$f_2(y_2) = y_2^3 + 249 \cdot 40 y_2^2 + 17467 \cdot 40^2 \cdot y_2 - 13813 \cdot 40^3 = 0$$

oder

$$2) \quad f_2(y_2) = y_2^3 + 9960 y_2^2 + 27947200 y_2 - 884032000 = 0.$$

Diese Gleichung liefert

$$31 < y_2 < 32,$$

so dass zu nehmen ist

$$y_2 = 31 + \frac{y_3}{40}.$$

Wir finden nun









Stromverzweigungsproblem für eine Reihe von verschiedenartig geformten Platten gelöst. Dabei wurde für  $\mu$  eine unbestimmte Randbelegung der Platte angenommen, so dass die Dichtigkeit als Function von  $s$  in einer Reihe mit unbestimmten Coefficienten entwickelt gedacht wurde. Dann wurden diese Coefficienten bestimmt durch die Bedingung, dass das Gesamtpotential  $V$  am ganzen Rande  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$  ergeben muss. Es stellte sich nun in allen durchgeführten Fällen heraus, dass die so gefundene Randbelegung ersetzt werden kann durch zwei gleiche Punktsysteme, deren jedes einem der Pole coordinirt ist; in jedem Punkte des einen Systems war die Masse  $+m$ , des andern  $-m$  concentrirt; das Potential  $V$  blieb bei dem Ersatz der Randbelegung durch jene beiden äusseren Punktsysteme in allen Punkten der Platte unverändert, so dass jene beiden Punktsysteme ebenfalls als das gesuchte  $\mu$  angesehen werden konnten: das eine von ihnen als  $\mu_1$ , das andere als  $\mu_2$ . Dies führte mich auf den Gedanken, die Lösung direct so zu versuchen, dass ich ein Punktsystem  $\mu_1$  bestimmte, welches mit  $+m$  in dem einen Polpunkte am ganzen Rande  $\frac{\partial V}{\partial n} = f(s)$  ergab, wo, wie oben,  $f(s)$  von der speciellen Lage des Poles und des äusseren, ihm coordinirten Punktsystems unabhängig sei.

Auf solche Weise gelang es mir, die Massenvertheilungen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  für eine ganze Reihe von Platten zu bestimmen, für welche eine Lösung auf dem gewöhnlichen Wege schon deswegen undenkbar war, weil die Randcurve nicht durch eine bestimmte Gleichung dargestellt werden konnte, wie z. B. für eine Platte, welche die Form eines Viertelkreises hat.

Es sei nun  $x$  ein beliebiger Punkt auf der Platte,  $s, s_1, s_2, s_3 \dots$  seine Entfernungen von dem Pole  $P_1$  und den verschiedenen Punkten des Systems  $\mu_1$ , ferner  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$  seine Entfernungen von dem Pole  $P_2$  und den Punkten des Systems  $\mu_2$ . Dann ist das Potential  $V$  im Punkte  $x$  gleich

$$\begin{aligned} V &= +m \lg s + m \lg s_1 + m \lg s_2 - m \lg \sigma - m \lg \sigma_1 - m \lg \sigma_2 - \dots \\ &= m \lg \frac{s s_1 s_2 \dots}{\sigma \sigma_1 \sigma_2 \dots}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Curven constanten Potentials war daher

$$\frac{s s_1 s_2 s_3 \dots}{\sigma \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots} = C,$$

wo  $C$  eine beliebige Constante. Die orthogonalen Trajectorien dieses Curvensystems waren dann die gesuchten Strömungskurven. Man sieht also, dass durch Aufsuchung der erwähnten äusseren Punktsysteme das Problem in gewissem Sinne als gelöst betrachtet werden konnte. Ich gehe nun über zur successiven Darlegung der von mir behandelten Fälle.



$\mu_1$  angeben, welches dem Pole  $P_1$  coordinirt ist. Man hat sich dann jedesmal das entsprechende, dem andern Pole coordinirte System  $\mu_2$  dazu zu denken.

2. Ein Viertelkreis. Es sei  $P'_1$  (Fig. 3) dem Polpunkte  $P_1$  conjugirt,  $Q_1$  und  $Q'_1$  die Spiegelpunkte von  $P_1$  und  $P'_1$  in Bezug auf den Rand  $AB$  und endlich  $R_1, R'_1, S_1, S'_1$  die Spiegelpunkte von  $P_1, P'_1, Q_1, Q'_1$  in Bezug auf den Rand  $AC$ . Dann besteht das gesuchte äussere System  $\mu_1$  aus den sieben Punkten  $P'_1, Q_1, Q'_1, R_1, R'_1, S_1, S'_1$ . Ein Blick auf Fig. 3 genügt, um einzusehen, dass diese Punkte zusammen mit dem Pole  $P_1$  an den Rändern  $AB$  und  $AC$  überall  $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$  (Satz A)

und am Rande  $BC$  überall  $\frac{\partial V_1}{\partial n} = \text{Const.}$  ergeben (Satz B), da nämlich jedes der Punktpaare  $(P_1, P'_1), (Q_1, Q'_1), (R_1, R'_1)$  und  $(S_1, S'_1)$  in Bezug auf den Kreisbogen conjugirt ist. Das dem andern Pol  $P_2$  entsprechende Punktsystem  $\mu_2$  ist auf der Zeichnung nicht angegeben. Das endgiltig zu findende  $V$  ist also das Potential von im Ganzen 16 Punkten.

3. Ein Achtelkreis.  $ABC$  (Fig. 4) ist die gegebene Platte. Das äussere System besteht aus 15 Punkten  $P'_1, a, b \dots o$ . Hier ist  $P'_1$  conjugirt dem Polpunkte  $P_1$ , ferner  $AP_1 = Aa = Ac = Ae = Ag = Ak = Am = Ao$  und  $\angle AP'_1 = \angle Ad = \angle Af = \angle Ah = \angle Ai = \angle Al = \angle an$  und  $\angle P'_1 AC = \angle cab = \angle dAE = \angle fAE = \angle hAD = \angle iAD = \angle lAF = \angle nAF$ , wo  $EF \perp DC$  steht. Man sieht leicht ein, dass die Punkte symmetrisch sind in Bezug auf die Ränder  $AB$  und  $AC$  und paarweise conjugirt in Bezug auf den Rand  $BC$ .

4. Ein Kreissector, dessen Winkel an der Spitze  $\frac{\pi}{n}$  ist, wo  $n$  eine ganze Zahl. Das System  $\mu_1$  besteht aus  $4n - 1$  leicht zu construierenden Punkten. Das gesuchte  $V$  ist somit Potential von  $2(4n - 1) + 2 = 8n$  Punkten und hat die Form

$$V = \frac{s_1 s_2 s_3 \dots s_{4n}}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \dots \sigma_{4n}} = \text{Const.}$$

Auf Fig. 5 sind beispielsweise die Punkte des Systems  $\mu_1$  für den Fall  $n = 3$  gezeichnet; sie sind symmetrisch in Bezug auf die Ränder  $BA$  und  $CA$  und paarweise conjugirt in Bezug auf den Rand  $CB$ .

Für den Fall, dass der Winkel an der Spitze gleich  $\frac{2\pi}{2n+1}$  ist, lässt sich das Punktsystem  $\mu_1$  nur dann construieren, wenn die beiden Polpunkte auf der den Winkel halbirenden Geraden liegen.

5. Eine unendlich grosse Platte, welche die Form eines rechten oder spitzen Winkels  $\alpha$  hat, wo  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ . Das System  $\mu_1$  besteht aus den  $2n - 1$  optischen Spiegelpunkten des Poles  $P_1$  in Bezug



$CD$  symmetrischen kreisförmigen Punktsystemen (Fig. 11). Führt man dipolare Coordinaten ein, so kann man  $V$  in eine Reihe entwickeln.

10. Eine unendliche, von zwei parallelen Geraden begrenzte Platte.  $\mu_1$  besteht aus dem System der optischen Bilder des Poles  $P_1$  in Bezug auf die beiden begrenzenden Geraden. Es ist nämlich in diesem Falle an beiden Rändern  $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$ .

11. Eine unendliche Platte, in welcher ein Kreis ausgeschnitten ist.  $\mu_1$  besteht aus dem einen Punkte  $P'_1$  (Fig. 12) innerhalb des Kreises, welcher dem Polpunkte  $P_1$  conjugirt ist. Das gesuchte  $V$  ist also das Potential der vier Punkte  $P_1, P'_1, P_2, P'_2$ , so dass die allgemeine Gleichung der Curven constanten Potentials ohne Weiteres in Polarcordinaten niedergeschrieben werden kann.

12. Eine unendliche Platte, aus welcher zwei beliebige Kreise ausgeschnitten sind.  $\mu_1$  besteht aus einem kreisförmigen Punktsystem, welches man erhält, wenn man, vom Pole  $P_1$  ausgehend, successive in Bezug auf beide Kreise conjugirte Punkte construirt; diese liegen auf dem durch  $P_1$  und die beiden Grenzpunkte  $A$  und  $B$  bestimmten Kreise. Durch Einführung von dipolaren Coordinaten kann man die allgemeine Gleichung der Curven constanten Potentials unschwer aufstellen.

13. Eine unendliche Platte, die von einer Geraden begrenzt wird, mit halbkreisförmigem Ausschnitt.  $\mu_1$  besteht aus den drei Punkten  $Q_1, Q'_1$  und  $P'_1$ , wo  $Q_1$  dem Polpunkte  $P_1$  conjugirt,  $Q'_1$  und  $P'_1$  dagegen die Spiegelpunkte jener in Bezug auf den Rand  $ABCD$  sind. Ebenso besteht  $\mu_2$  aus den Punkten  $P'_2, Q_2$  und  $Q'_2$ . Das gesuchte  $V$  im Punkte  $x$  ist also das Potential von im Ganzen acht Punkten.

Es ist interessant, bei diesem Falle die Wirkung des Randes näher zu betrachten. Wäre die Platte nach allen Seiten hin unbegrenzt, so würde die in einem Punkte  $x$  der Platte wirkende Kraft einfach die Resultante zweier von  $P_1$  und  $P_2$  ausgehenden Kräfte  $+\frac{m}{P_1 x}$  und  $-\frac{m}{P_2 x}$  sein. Ist die Platte von einer ununterbrochenen Geraden  $AD$  begrenzt, so muss man noch die Wirkung der zwei Spiegelpunkte  $P'_1$  und  $P'_2$  hinzufügen, wodurch gleichsam die durch den Rand in den Strömungskurven hervorgerufenen Veränderungen repräsentirt werden. Hat die Platte überdies den Ausschnitt  $BC$ , so kommt noch die Wirkung von vier Punkten  $Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2$  hinzu, von denen zwei positive und zwei negative Massen enthalten. Diese Wirkung ist nur in der Nähe des Randes  $BC$  von merklicher Grösse und giebt uns ein Bild von den durch den Ausschnitt in nächster Nähe derselben hervorgerufenen Perturbationen in dem Verlaufe der Strömungskurven.





Was die erste Frage betrifft, so sei  $AOB$  (Fig. 17) die gegebene Platte,  $P_1$  und  $P_2$  die Polpunkte und  $MN$  eine ganz beliebige Curve  $S$ , welche aber so verläuft, dass die beiden Pole zwischen ihr und der Spitze  $O$  liegen. Da kein Verlust von Elektrizität stattfindet, so muss die gesamte über  $S$  hinüberfliessende Elektrizitätsmenge Null sein. Dies führt uns zu der Bedingung:

IV. Es muss für jede beliebige, zwei Randpunkte  $M$  und  $N$  verbindende und nicht zwischen den Polen hindurchgehende Curve  $S$

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$$

sein.

Ich will nun beweisen den

Satz 1. Genügt  $V$  den Bedingungen I—III, so ist die Bedingung IV *eo ipso* erfüllt.

Beweis. Wir umgeben die Pole mit kleinen Kreisen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , deren Radius  $r$  sei, und wenden auf das von den Curven  $S$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und den Geraden  $MO$  und  $ON$  begrenzte Flächenstück die Formel

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = \iint D^2 V dx dy$$

an. Da  $D^2 V = 0$  ist (Bed. I), so verbleibt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_1 + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_2 + \int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0,$$

wo  $d\sigma$  ein Element des geradlinigen Randes sei. An diesem Rande ist

aber  $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$  (Bed. III), also ist  $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0$ ; ferner ist  $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_1 = +f$

und  $\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma_2 = -f$ , wo  $f$  der Stromstärke proportional ist. Es verbleibt also

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0,$$

q. d. e.

Ich gehe über zu der zweiten Frage und werde nachweisen, dass das Potential  $V$  durch die Bedingungen I—III eindeutig bestimmt wird. Für eine endliche Platte ist der Beweis bekanntlich sehr einfach; viel schwieriger ist er für eine unendlich grosse Platte.

Denken wir uns das Problem gelöst. Dann ist  $V$  das Potential von  $+m$  im Pole  $P_1$ ,  $-m$  im Pole  $P_2$  und einer gewissen Randbelegung  $\mu$ . Ueber diese Belegung  $\mu$  wollen wir vorerst zwei Sätze beweisen.

Erster Satz. Die lineare Dichtigkeit  $\rho$  der Massen  $\mu$  strebt für unendlich entfernte Randpunkte der Null zu.

Beweis. Es seien  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Potentiale der Massen  $+m$ ,  $-m$ ,  $\mu$ ; dann giebt die Bedingung III

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Für unendlich entfernte Punkte ist aber offenbar

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

Es bleibt also  $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ . Man sieht aber ohne Weiteres ein, dass  $\frac{\partial w}{\partial n}$  der Dichtigkeit  $\rho$  proportional ist, so dass  $\rho = 0$  verbleibt, q. d. e.

**Zweiter Satz.** Die algebraische Summe  $M$  der Massen  $\mu$  ist gleich Null.

**Beweis.** Wir wollen das Integral

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

betrachten, ausgedehnt über einen Bogen von unendlich grossem Radius, dessen Mittelpunkt in  $O$  sei. Wir wissen, dass für unendlich entfernte Punkte  $\frac{\partial V}{\partial n}$  sich dem Grenzwerthe  $\frac{M}{R}$  nähert, wo  $R$  die Entfernung jener Punkte von einem andern, im Endlichen liegenden Punkte bedeutet, als welchen man die Spitze  $O$  nehmen kann. Es ist also

$$\lim \int \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int \frac{M}{R} R d\epsilon = M\beta,$$

wo  $\beta$  der Winkel  $AOB$  ist. Nun haben wir aber (Bed. IV)  $\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 0$ , folglich ist  $M = 0$ , q. d. e. Daraus folgt ein

**Dritter Satz.** Die Function  $V$ , welche den Bedingungen I—III genügt, strebt für unendlich entfernte Punkte der Null zu.

Das ist klar, wenn man bedenkt, dass  $V$  das logarithmische Potential der Massen  $+m$ ,  $-m$  und  $\mu$  ist, die sämmtlich im Endlichen liegen (erster Satz) und deren algebraische Summe Null ist (zweiter Satz). Nun erst können wir an unsere Aufgabe gehen und den

**Satz 2** beweisen. Auch für eine unendlich grosse Platte wird  $V$  durch die Bedingungen I—III eindeutig bestimmt.

**Beweis.** Es seien zwei Lösungen  $V_1$  und  $V_2$  möglich und es sei

$$V_2 - V_1 = U.$$

Dann hat  $U$  folgenden vier Bedingungen zu genügen:

1.  $U$  und seine ersten Differentialquotienten müssen auf der ganzen Platte endlich und stetig sein;
2.  $D^2 U = 0$  auf allen Punkten der Platte;
3.  $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$  am Rande;
4.  $U = 0$  für unendlich entfernte Punkte — folgt aus dem dritten Satz.

Rand  $OB$ . Wir fügen  $+s$  und  $-s$  auf  $OF$ ,  $+s$  und  $-s$  auf  $OG$ ,  $+r$  und  $-r$  auf  $OD$  hinzu (Fig. 22). Dann heben sich auf:

1.  $+s$  auf  $OF$  und  $+s$  auf  $OH$  (Satz C);
2.  $+m$  in  $P_1$ ,  $+m$  in  $P'_1$ ,  $-s$  auf  $OF$  und  $-s$  auf  $OG$  (nach der Definition von  $s$ );
3.  $+s$  auf  $OG$ ,  $+s$  auf  $OE$ ,  $-r$  auf  $OD$  und  $-\mu$  auf  $OC$  (nach der Definition von  $r$  und  $\mu$ );
4.  $+r$  auf  $OD$  (Satz C).

Hiermit sind alle Massen erschöpft und bewiesen, dass am ganzen Rande  $\frac{\partial V_1}{\partial n} = 0$  ist.

Nachschrift. Zu den in § 1 behandelten Fällen lässt sich noch hinzufügen:

16. Eine unendliche Platte von der Form eines rechten Winkels, an dessen Scheitel ein Stück in Form eines Viertelkreises ausgeschnitten ist, dessen Centrum mit dem Scheitel des rechten Winkels zusammenfällt. —  $\mu_1$  besteht aus sieben Punkten: den drei Spiegelpunkten des Poles  $P_1$  in Bezug auf die beiden geradlinigen Ränder der Platte und den vier Spiegelpunkten jener drei und des Poles  $P_1$  in Bezug auf den zum vollen Kreise ergänzt gedachten viertelkreisförmigen Rand.  $V$  ist also das Potential von 16 Punkten.

St. Petersburg, den  $\frac{28. \text{ Nov.}}{10. \text{ Dec.}}$  1875.







$= 0, \dots, f(\alpha_p) = 0$  ist, so werden  $\frac{u_1}{u_0} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p, \frac{u_2}{u_0} = \alpha_1 \alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1} \alpha_p, \dots, \frac{u_p}{u_0} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p$ , und folglich sind  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  die Wurzeln der Gleichung  $u_0 u^p - u_1 u^{p-1} + u_2 u^{p-2} + \dots + (-1)^p u_p = 0$ .

Ist die Resultante  $R_m$  durch die Coefficienten  $a$  und  $b$  rational gestellt, so ist es auch hier leicht, die Functionen  $u_0, u_1, \dots, u_p$  als bloße Differentiationen von  $R_m$  zu finden.

Denn es ist

$$u_0 = \sum f_{p+1} \cdot f_{p+2} \dots f_m = R_{m-p} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p}.$$

Ferner findet man

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (p-1)} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-1} \cdot \partial b_{n-1}}, \\ u_2 &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (p-2) \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-2} \cdot \partial b_{n-1}^2}, \dots, \\ u_q &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (p-q) \cdot 1 \cdot 2 \dots q} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-q} \cdot \partial b_{n-1}^q}, \dots, \\ u_p &= \frac{1}{1 \cdot 2 \dots p} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p}. \end{aligned}$$

Genügen also die Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  der Gleichung  $f(x)$  sind diese die Wurzeln folgender Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p} u^p - \frac{p}{1} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-1} \cdot \partial b_{n-1}} u^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^{p-2} \cdot \partial b_{n-1}^2} u^{p-2} \\ \dots + (-1)^p \cdot \frac{\partial^p R_m}{\partial b_n^p} = 0. \end{aligned}$$

### III. Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Es mögen nun in den Gleichungen  $F(x) = 0$  und  $f(x) = 0$  die Coefficienten  $a$  und  $b$  Functionen einer zweiten Variablen  $y$  sein, deren Grad durch den Index angegeben ist, so stellen  $F(x, y) = 0$  und  $f(x, y) = 0$  zwei allgemeine Gleichungen mit zwei Unbekannten resp.  $m^{\text{ten}}$  und  $n^{\text{ten}}$  Grade dar. Die Gleichung  $R_m = 0$  enthält dann bloß bekannte  $y$ , und zwar ist sie für diese vom Grade  $mn$ , da  $R_m$  offenbar durch das oben angegebene Gewicht bestimmt wird. Also  $mn$  Werthe von  $y$ , für welche die Gleichung  $R_m = 0$  erfüllt ist. Setzt man also diese  $mn$  Werthe von  $y$  in die Gleichungen  $F(x, y) = 0$  und  $f(x, y) = 0$  ein, so werden beide Gleichungen von demselben  $x$  befriedigt. Der zu jedem Werthe von  $y$  gehörige Werth von  $x$  lässt sich nach § II rational durch  $y$  ausdrücken. Wir formulieren den Satz:





hammer gelungen ist, und da die dabei auftretenden Verhältnisse ganz anderer Natur als bei der conformen Abbildung sind, so kann wohl eine kurze Mittheilung dieser Untersuchungen manchen Leser dieser Zeitschrift interessiren und kann zu weiterer Untersuchung dieses Beziehungsprincips Veranlassung geben, weshalb seine Resultate hier folgen mögen.

THOMAE.

§ 1. Sind  $xy$  rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene und  $\xi\eta$  die entsprechenden in einer andern, wobei  $\xi\eta$  Functionen von  $x$  und  $y$  bedeuten, so ist der Flächeninhalt des dem Elemente  $dx dy$  in der  $\xi\eta$ -Ebene entsprechenden Elementes, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) dx dy,$$

und daher ist die Bedingung der Flächengleichheit der beiden Elemente\*

$$A) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 1.$$

Um alle möglichen Lösungen dieser Differentialgleichung zu erhalten, können wir für eine der unbekannten Veränderlichen ( $\xi\eta$ ) eine beliebige Function von  $x$  und  $y$  setzen. Substituiren wir  $\xi = f(x, y)$ , so erhalten wir leicht die Integralgleichungen

$$\eta = \int \frac{dy}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}} + F(\xi) = - \int \frac{dx}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} + \Phi(\xi),$$

wobei  $F(\xi)$  und  $\Phi(\xi)$  willkürliche Functionen von  $\xi$  und  $\varphi$  sind, so dass also die allgemeinste Lösung obiger Differentialgleichung ist

$$B) \quad \begin{cases} \xi = f(x, y), \\ \eta = \int \frac{dy}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}} + F(\xi) = - \int \frac{dx}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} + \Phi(\xi). \end{cases}$$

In den Ausdrücken  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , die unter dem Integralzeichen stehen, muss nach der Differentiation  $x$ , bzw.  $y$  in Function von  $\xi$  und  $y$ , resp. von  $\xi$  und  $x$  ausgedrückt werden. (Dies ist in dem Lehrbuch der Kartenprojection von Dr. H. Gretsche [Weimar 1872, S. 175] nicht bemerkt; in den dort angeführten Beispielen freilich tritt dieser

\* Die rechte Seite dieser Gleichung ist eigentlich  $= \pm 1$ . Wir können uns aber auf das positive Vorzeichen beschränken, da im Falle des negativen durch eine Vertauschung der Coordinaten  $\xi$  und  $\eta$  die rechte Seite stets positiv gemacht werden kann.



und es bedeute  $n$  eine positive Zahl, die grösser als die  $x$ -Coordinate des Punktes  $B$  ist. Dann bildet die Substitution

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \eta &= y + \frac{m_1 - m_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_0^n \lambda \cos \alpha(\lambda - x) d\lambda \\ &= y + \frac{m_1 - m_2}{\pi} x \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha(n - x) + \sin \alpha x}{\alpha} d\alpha\end{aligned}$$

das Viereck  $ABCD$  auf das Dreieck  $AB'D$  äquivalent ab; denn das Dreieck  $ABC$  wird durch dieselbe auf das Dreieck  $AB'C$  verschoben, während das Dreieck  $ACD$  ungeändert bleibt. (Fig. 1.)

§ 4. Bei dieser Abbildung wurde eine discontinuirlichen Factor enthaltende Function angewendet, zu deren Bildung ein Fouriersches Integral benutzt werden musste, da sich dieselbe nicht durch einen analytischen Ausdruck darstellen lässt.

Dagegen gelingt es, auf die besprochene Weise durch eine analytische Function einen Halbkreis auf eine Ellipse äquivalent abzubilden.

Setzen wir nämlich unter Annahme rechtwinkliger durch das Centrum eines Kreises gehender Axen

$$F(\xi) = -\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2},$$

also

$$\xi = x, \quad \eta = y - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2},$$

wobei  $a$  der Radius des Kreises ist, so bildet sich dadurch der über der  $x$ -Axe liegende Halbkreis äquivalent auf eine Ellipse ab, deren Halbachsen  $a$  und  $\frac{1}{2}a$  sind.

In einem späteren Paragraphen werden wir die Ellipse auf einen Kreis abbilden, womit also gleichzeitig die Aufgabe gelöst wird, einen Halbkreis auf den ganzen Kreis äquivalent abzubilden. Denn wenn eine von zwei äquivalenten Abbildungen einer dritten äquivalent ist, so sind sie unter sich äquivalent.

§ 5. Das unter § 4 angeführte Beispiel kann als specieller Fall einer allgemeineren Abbildungsweise betrachtet werden.

Es lässt sich nämlich mittelst der Abbildung durch Verschiebung paralleler Streifen jede Figur mit beliebiger Begrenzung auf eine symmetrisch zu einer Geraden liegende abbilden, wenn eine Richtung existirt, so dass alle zu derselben gezogenen Parallelen die Contour nur in zwei Punkten schneiden.

Um dies zu zeigen, wählen wir die  $y$ -Axe parallel zu dieser Richtung und bezeichnen die zur Abscisse  $x$  gehörigen Ordinaten der Br



Da die Abbildung  $\xi - \xi_0 = \xi'$ ,  $\eta - \eta^0 = \eta'$  offenbar nur eine Verschiebung des Bildes ohne innere Veränderung bewirkt, so kann man die Gleichungen

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a_1 x + b_1 y$$

als die allgemeinste, eine äquivalente Abbildung vermittelnde lineare Substitution betrachten, vorausgesetzt, dass  $ab_1 - ba_1 = 1$  ist..

Die Bedeutung dieser Abbildung lässt sich in folgender Weise erkennen.

Wir beziehen die Punkte der  $xy$ -Ebene auf andere Axen, die zu den ursprünglichen unter einem Winkel  $\alpha$  geneigt sind, durch die Relationen

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \xi &= x' (a \cos \alpha + b \sin \alpha) + y' (b \cos \alpha - a \sin \alpha), \\ \eta &= x' (a_1 \cos \alpha + b_1 \sin \alpha) + y' (b_1 \cos \alpha - a_1 \sin \alpha). \end{aligned}$$

Den Winkel  $\alpha$  bestimmen wir durch die Gleichung  $b \cos \alpha - a \sin \alpha = 0$ , woraus sich ergibt  $\operatorname{tg} \alpha = b : a$ . Mit Berücksichtigung der Beziehung  $ab_1 - ba_1 = 1$  ist also

$$\xi = x' \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \eta = x' \frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{y'}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nun bilden wir die Figur in der  $x'y'$ -Ebene durch gleichen Zug und Druck auf eine andere ab, indem wir setzen

$$x' = \frac{x''}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y' = y'' \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dadurch nehmen die Ausdrücke für  $\xi$  und  $\eta$  die Form an

$$\xi = x'', \quad \eta = x'' \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} + y'' = y'' + \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} \xi.$$

Daraus ersehen wir, dass die durch die lineare Substitution

$$\xi = ax + by, \quad \eta = a_1 x + b_1 y$$

bewirkte äquivalente Abbildung sich aus zwei bereits erwähnten Abbildungsarten zusammensetzt, nämlich aus einer durch gleichen Zug und darauf senkrechten Druck hervorgebrachten, in den durch die Gleichungen  $\operatorname{tg} \alpha = \pm b : a$  bestimmten Richtungen und aus einer Abbildung durch Verschiebung paralleler Streifen in der durch die Gleichung  $\operatorname{tg} \alpha = -b : a$  bestimmten Richtung.

§ 8. Als Beispiel hierzu wollen wir die Aufgabe behandeln, ein Dreieck auf ein anderes äquivalent abzubilden, dessen Winkel gegeben sind. (Fig. 2.)

Es sei  $ABC$  das gegebene Dreieck,  $A$  der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen  $x$ -Axe auf  $BC$  senkrecht stehe;  $AB$  bilde mit der positiven Richtung der  $x$ -Axe den Winkel  $u$  und  $AC$  den Winkel  $v$ . Die vorgegebenen Winkel des Bilddreiecks seien  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Abstände  $c$  zur  $y$ -Axe gezogene Parallele bildet sich wieder auf eine zur  $\eta$ -Axe parallele Gerade  $\xi = p:c$  ab, eine Parallele zur  $x$ -Axe  $y=b$  dagegen auf die Curve  $\eta\xi^2 = -pb$ . Dem von den Axen und den Geraden  $x=a_1$ ,  $y=b_1$  gebildeten Rechteck entspricht also in der Bildebene ein ins Unendliche sich erstreckendes Flächenstück, das begrenzt ist von der  $\xi$ -Axe, der Geraden  $\xi = p:a_1$  und der der  $\xi$ -Axe asymptotisch sich nähernden Curve  $\eta\xi^2 = -pb_1$ . Der Inhalt dieses Flächenstückes ist also

$$= - \int_{\infty}^{p:a_1} (pb_1:\xi^2) d\xi = a_1 b_1, \text{ also in der That gleich dem Inhalt des Rechtecks.}$$

§ 10. Wir wählen nun für  $\xi$  die Substitution

$$\xi = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y}{b_0 + b_1 x + b_2 y}.$$

Auch dieser Ausdruck lässt sich durch passende Drehung und Verschiebung der Coordinatenachsen auf einen einfacheren, dem Wesen nach mit ihm gleichbedeutenden reduciren.

Machen wir zunächst die Gerade  $b_0 + b_1 x + b_2 y = 0$  zur  $y$ -Axe, so nimmt  $\xi$  die Form an

$$\xi = \frac{a'_0 + a'_1 x' + a'_2 y'}{y'} = \frac{a'_0 + a'_1 x'}{y'} + a'_2,$$

daher

$$\xi - a'_2 = \xi' = \frac{a'_0 + a'_1 x'}{y'}.$$

Verschieben wir nun noch die  $y'$ -Axe um die Strecke  $a'_0:a'_1$ , indem wir setzen

$$x'' = x' + \frac{a'_0}{a'_1}, \quad y'' = y',$$

so erhalten wir

$$\xi' = \frac{a'_1 x''}{y''}.$$

Die Substitution

$$\xi = q \frac{x}{y}$$

kanu also als die allgemeinste derartige Substitution betrachtet werden. Die Integralgleichung ergibt dann für  $\eta$  den Werth

$$\eta = \frac{y^2}{2q},$$

wenn wir die willkürliche Verschiebungsfuction ausser Acht lassen.

Da hier jeder zur  $x$ -Axe parallelen Geraden wieder eine zur  $\xi$ -Axe parallele Gerade entspricht, jeder durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie aber eine Parallele zur  $\eta$ -Axe, so können wir vermittelt dieser Substitution ein Dreieck auf ein Parallelogramm abbilden. Dabei entspricht aber ein Eckpunkt des Dreiecks, nämlich der Coordinaten-





auf unendlich viele Arten auf sich selbst abgebildet werden kann, ohne dass sich die übrigen Theile und der Rand verschieben.

Daraus folgt, dass die Aufgabe, eine Figur auf eine andere in der Weise äquivalent abzubilden, dass die Begrenzungscurven einander entsprechen, eine unendliche Anzahl von Lösungen zulässt.

§ 13. Eine der einfachsten Substitutionen für Polarcoordinaten ist

$$r = \varrho \cos \varphi, \quad \vartheta = \lg \varphi.$$

Gehen wir zu rechtwinkligen Coordinaten zurück, so haben wir an die Stelle dieser Gleichungen zu setzen

$$\xi = x \cos \frac{y}{x}, \quad \eta = x \sin \frac{y}{x}.$$

Hierbei bildet sich jede zur  $y$ -Axe parallele Gerade auf einen Kreis ab, dessen Radius gleich dem Abstände der Geraden von der  $y$ -Axe ist, während jeder durch den Anfangspunkt gehenden Geraden wieder eine durch den Anfangspunkt gehende Gerade entspricht; der  $x$ -Axe entspricht die  $\xi$ -Axe, der  $y$ -Axe der Nullpunkt. Ferner sehen wir, dass jede Gerade, welche mit der positiven Richtung der  $x$ -Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente ein Multiplum von  $2\pi$  ist, sich auf die positive Richtung der  $x$ -Axe abbildet. Der ganze Flächenraum zwischen der  $y$ -Axe und der in dem Abstände  $a$  zu derselben gezogenen Parallelen bildet sich also unendlich oft auf den Kreis mit dem Radius  $a$  ab.

Einem Parallelogramm, das von den Geraden  $x = a_1$ ,  $x = a_2$ ,  $y = m_1 x$ ,  $y = m_2 x$  gebildet wird, entspricht das von den Kreisen  $r = a_1$ ,  $r = a_2$  und den Geraden  $\eta = \xi \lg m_1$ ,  $\eta = \xi \lg m_2$  begrenzte Flächenstück. Ist  $a_2 = 0$ , so geht das Parallelogramm in ein Dreieck über und das entsprechende Bild ist ein Kreissector. Damit sind wir also in den Stand gesetzt, ein Dreieck auf einen Kreissector äquivalent abzubilden.

§ 14. Es ist nun leicht, die Aufgabe dahin zu erweitern, ein Dreieck auf einen Kreissector abzubilden, der zu einem gegebenen Centriwinkel  $2\pi : n$  gehört.

Wir setzen das gegebene Dreieck als ein rechtwinkliges voraus, was wir, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, thun dürfen, da sich nach § 8 jedes Dreieck leicht auf ein rechtwinkliges äquivalent abbilden lässt.

Es sei der der Kathete  $a$  gegenüberliegende Eckpunkt der Anfangspunkt des Coordinatensystems, dessen  $x$ -Axe mit der Kathete  $b$  der Richtung nach zusammenfalle.

Wir bilden nun das gegebene Dreieck zuerst auf ein anderes rechtwinkliges ab, in welchem die  $a$  und  $b$  entsprechende Katheten  $\sqrt{2ab\pi : n}$  bez.  $\sqrt{abn : 2\pi}$  sind, vermittelt der Relationen

$$x = x' \sqrt{\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{b}{a}}, \quad y = y' \sqrt{\frac{n}{2\pi} \cdot \frac{a}{b}}.$$



sprechen im Allgemeinen, wenn nämlich das abzubildende Ebenenstück nach der einen Richtung hin nicht von zwei zur  $y$ -Axe parallelen Linien begrenzt ist, zwei Punkte, und zwar diejenigen, in welchen die Contour von der  $x$ -Axe getroffen wird je einer Seite des Rechtecks.

Eine Figur von der genannten Eigenschaft bildet sich also auf ein Rechteck ab durch die Substitution

$$\xi = \frac{a}{2} \int_0^x [f_1(x) - f_2(x)] dx, \quad \eta = \frac{1}{a} \frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)},$$

wobei  $f_1(x)$  und  $f_2(x)$  die gleiche Bedeutung haben wie in § 5.

§ 19. Die Aufgabe, eine solche Figur auf den Kreis äquivalent abzubilden, ist also darauf zurückgeführt, ein Rechteck in der Weise auf einen Kreis abzubilden, dass zwei gegenüberliegende Seiten zwei diametral gegenüberliegenden Punkten der Kreisperipherie entsprechen. Letztere Aufgabe haben wir in § 16 bereits gelöst. Ist  $F$  der Flächeninhalt des abzubildenden Ebenenstückes, so gelangen wir durch Verbindung der dort entwickelten Formeln mit denen des § 18 zu den Relationen

$$\xi = 2 \sqrt{\frac{1}{\pi N}} \int_0^x [f_1(x) - f_2(x)] dx,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{\pi N} \left\{ F^2 - 4 \left[ \int_0^x (f_1(x) - f_2(x)) dx \right]^2 \right\}} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)},$$

wobei

$$N = F + \cos \frac{\pi}{2} \frac{2y - f_1(x) - f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)} \sqrt{F^2 - 4 \left[ \int_0^x (f_1(x) - f_2(x)) dx \right]^2}$$

und die  $y$ -Axe so gewählt ist, dass dieselbe das Ebenenstück in zwei gleiche Theile theilt.

§ 20. Wir können indess auch noch andere Beziehungen aufstellen, welche den Bedingungen dieser Aufgabe entsprechen. Wir bilden nämlich den Kreis nach der in § 18 angegebenen Methode auf ein Rechteck ab durch die Substitutionen

$$x = \frac{a}{\pi} \int_0^{\xi} \frac{F}{\sqrt{F^2 - \xi^2}} d\xi = \frac{a}{2} \left( \frac{F}{\pi} \arcsin \xi \sqrt{\frac{F}{F^2 - \xi^2}} + \xi \sqrt{\frac{F}{F^2 - \xi^2}} \right),$$

$$y = \frac{1}{a} \int_0^{\eta} \frac{\eta}{\sqrt{F^2 - \eta^2}} d\eta = \frac{1}{a} \left( \frac{F}{\pi} \arcsin \eta \sqrt{\frac{F}{F^2 - \eta^2}} + \eta \sqrt{\frac{F}{F^2 - \eta^2}} \right),$$

wobei wir jetzt mit  $x, y$  die Coordinaten des Rechtecks, mit  $\xi, \eta$  die entsprechenden der Kreisfläche bezeichnen.



Wählen wir die Seiten  $g$  und  $h$  des Rechtecks wieder zu den Axen, so liefert uns die angegebene Methode die Beziehungen

$$\eta = -\frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (K+1) + \frac{1}{4} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} (K+1) + \frac{8F}{\pi} + \frac{16M}{\pi}},$$

$$\xi = \sqrt{\frac{F}{\pi} - \eta^2} - \sqrt{\frac{2F + 4M - 4\eta^2\pi}{\pi}},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$K = \frac{\sqrt{\frac{xh}{\pi} \cos \frac{y\pi}{h}}}{\sqrt{\frac{F}{\pi} - P^2}},$$

$$M = \frac{F}{\pi} \arcsin P \sqrt{\frac{\pi}{F}} + P \sqrt{\frac{F}{\pi} - P^2},$$

$$P = -2 \sqrt{\frac{xh}{\pi} \sin \frac{y\pi}{h}} + \sqrt{\frac{gh}{\pi} - \frac{xh}{\pi} \cos^2 \frac{y\pi}{h}}.$$

Hierbei entspricht der Geraden  $y = \frac{h}{2}$  die  $\xi$ -Axe, der Geraden  $x = \frac{g}{2}$  dagegen eine transcendente Curve.

Freiburg i. B., im Juli 1877.

FRZ. SCHELLHAMMER.



5. Eine Curve vierter Ordnung ist durch 14 Punkte bestimmt.

In einer im Jahre 1868 mit dem Steiner'schen Preise gekrönten Abhandlung „Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades“ von Kortum sagt der Verfasser, dass ihm von diesen Sätzen keine stichhaltigen geometrischen Beweise bekannt wären und dass der strenge Beweis derselben eine vollständige geometrische Theorie der Curven vierter Ordnung involvirt.

Wie ich hoffe, ist es mir gelungen, nicht nur diese Sätze, sondern auch die Hauptpolareigenschaften der Curven vierter Ordnung auf geometrischem Wege abzuleiten. Hauptsächlich stütze ich mich dabei auf die Eigenschaften des Curvennetzes dritter Ordnung. Die benutzten Methoden lassen sich übrigens verallgemeinern, so dass die Eigenschaften der Curven fünfter Ordnung aus denen der Curven vierter Ordnung, die der Curven sechster Ordnung aus denen der Curven fünfter Ordnung u. s. f. sich herleiten liessen. Dadurch gelang es, von einer Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung folgende Sätze zu beweisen:

6. Ist eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung durch zwei projectivische Büschel erster und  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel oder auch durch zwei Büschel zweiter und  $(n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt werden. Jede so erzeugte Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung wird von einer Curve dritter Ordnung in  $3n$  Punkten geschnitten.

Jede auf eine der genannten Arten erzeugte Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel dritter und  $(n-3)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt werden.

Die so erzeugten Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung sind durch  $\frac{1}{2}n(n+3)$  ihrer Punkte bestimmt.

Wenn man die Zahl der Punkte bestimmen könnte, in denen sich zwei Curven  $n^{\text{ter}}$  und  $m^{\text{ter}}$  Ordnung,  $m > 4$ , schneiden, so würde sich der letzte Satz dahin verallgemeinern lassen, dass eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, die durch zwei projectivische Büschel erster und  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt ist, auch durch zwei projectivische Büschel  $m^{\text{ter}}$  und  $(n-m)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt werden kann.

Nach der in 44 angegebenen Methode, welche die Verallgemeinerung der von Kortum a. a. O. angewendeten ist, lässt sich durch  $\frac{1}{2}n(n+3)$  gegebene Punkte vermittelst projectivischer Büschel erster und  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung oder zweiter und  $(n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung legen. Könnte man dasselbe vermittelst zweier projectivischen Büschel dritter und  $(n-3)^{\text{ter}}$  Ordnung thun, so würde sich, wie in 35a, die Umkehrung des ersten Theiles des in 6 angegebenen Satzes ableiten lassen.





$(hk)$ ,  $(hi)$  und  $(gk)$  gezogen werden können, sind drei Strahlenpaare der Involutionen  $S(aa_1 \dots)$  und  $\mathfrak{S}(aa_1 \dots)$ ; daher liegen diese Ecken auf der Ortscurve der Schnittpunkte der homologen Strahlenpaare der projectivischen Involutionen  $(S)$  und  $(\mathfrak{S})$ . Wir lassen die beliebige Gerade  $g$  um den Punkt  $(gh)$  sich drehen, so muss auch der Punkt  $(ik)$  fest bleiben, weil in diesen beiden Punkten sich entsprechende Strahlen der Involutionen treffen. Die übrigen vier Ecken durchlaufen die ganze Ortscurve, so dass die variablen Strahlen  $g, h$  und  $i, k$  entsprechende Strahlenpaare zweier projectivischen Involutionen mit den Scheiteln  $(gh)$  und  $(ik)$  bilden; denn es sind Tangenten an die Kegelschnitte einer Schaar mit vier festen Tangenten  $aa_1, aa_1$  oder  $bb_1, bb_1, \dots$  und wir können je zwei Paare, die denselben Kegelschnitt berühren, einander zuweisen, wodurch eine projectivische Beziehung hergestellt ist. Es wird also die Ortscurve aus irgend zwei Gegenecken eines der erhaltenen eingeschriebenen vollständigen Vierseite durch zwei projectivische Involutionen projecirt, und wenn man irgend einen Punkt mit den Gegeneckenpaaren dieser unendlich vielen eingeschriebenen vollständigen Vierseite verbindet, so bilden die Strahlen eine quadratische Involution, denn man kann jeden Punkt der Curve als eine Ecke eines vollständigen ihr eingeschriebenen Vierseits ansehen. Sind nun  $M_0, M_1, M_2$  irgend drei Punkte der Ortscurve, so werden von ihnen alle Punkte derselben durch quadratische Involutionen projecirt, deren Doppelstrahlen  $\mu_0\mu'_0, \mu_1\mu'_1, \mu_2\mu'_2$  sein mögen. Wir betrachten sie als Kegelschnitte, so bestimmen sie ein Netz, dessen Tripelcurve (vergl. Schroeter, Steiner's Vorlesungen) mit unserer Ortscurve zusammenfällt. Dann sind  $(gh)$  und  $(ik)$  irgend zwei Gegenecken eines eingeschriebenen vollständigen Vierseits, so bilden  $M_0(gh)$  und  $M_0(ik)$ ,  $M_1(gh)$  und  $M_1(ik)$ ,  $M_2(gh)$  und  $M_2(ik)$  Strahlenpaare der Involutionen in  $M_0, M_1, M_2$ . Jedes von ihnen wird durch die Doppelstrahlen  $\mu_0\mu'_0, \mu_1\mu'_1, \mu_2\mu'_2$  harmonisch getrennt, so dass also  $(gh)$  und  $(ik)$  conjugirte Punkte in Bezug auf die drei Kegelschnitte  $(\mu_0\mu'_0), (\mu_1\mu'_1), (\mu_2\mu'_2)$  sind. Dasselbe gilt von je zwei Gegenecken eines der unendlich vielen eingeschriebenen Vierseite, woraus folgt, dass die Schnittpunkte homologer Strahlenpaare der projectivischen Involutionen  $(S)$  und  $(\mathfrak{S})$  auf einer Curve dritter Ordnung, der Tripelcurve des durch  $(\mu_0\mu'_0), (\mu_1\mu'_1), (\mu_2\mu'_2)$  constituirten Kegelschnittnetzes liegen.

Diese Curve trifft die Gerade  $l$  in drei Punkten, so dass also auf  $l$  vier Schnittpunkte homologer Kegelschnitte der im Satze genannten projectivischen Kegelschnittbüschel liegen. Daraus folgt aber, dass der Ort aller Schnittpunkte solcher Kegelschnitte eine Curve vierter Ordnung ist. Sie geht durch die acht Grundpunkte der Büschel und hat soviel Doppelpunkte, als diese Büschel gemeinschaftliche Grundpunkte haben.

Das erhaltene Resultat giebt folgenden Satz:

2. Der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare zweier projectivischen Involutionen ist eine Curve dritter Ordnung, wenn der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, sonst eine Curve vierter Ordnung, welche die beiden Scheitel zu Doppelpunkten hat.

Wir nennen diese Scheitel  $S$  und  $\mathfrak{S}$  und legen durch den Schnittpunkt  $A$  zweier homologen Strahlen zwei Gerade  $g$  und  $g$ , so werden diese von den beiden Strahleninvolutionen in zwei projectivischen Punktinvolutionen geschnitten, in welchen  $A$  sich selbst entspricht. Daher werden die Geraden, welche homologe Punkte verbinden, von einer Curve dritter Classe eingehüllt, die auch  $g$  und  $g$  zu Tangenten hat. Da diese durch sieben Tangenten ausser  $g$  und  $g$  bestimmt ist, so muss für den Fall, dass der gemeinsame Strahl der Involutionen ( $S$ ) und ( $\mathfrak{S}$ ) sich nicht selbst entspricht, die von diesen erzeugte Curve  $K^4$  vierter Ordnung ausser durch die Doppelpunkte  $S$  und  $\mathfrak{S}$  durch acht andere Punkte vollständig und eindeutig bestimmt sein.

Aus dem Gesagten ergibt sich leicht die Construction einer Curve vierter Ordnung, wenn von derselben die beiden Doppelpunkte und acht andere Punkte gegeben sind. Wenn aber ausser den beiden Doppelpunkten  $S$  und  $\mathfrak{S}$  nur noch sieben andere Punkte  $A, A_1, \dots, A_6$  gegeben sind, so werden sich durch dieselben unendlich viele Curven vierter Ordnung legen lassen. Man ziehe zu dem Zwecke durch  $A$  zwei beliebige Gerade  $g$  und  $g$ , schneide sie durch die Strahlen  $S(A_1 \dots A_6)$  und  $\mathfrak{S}(A_1 \dots A_6)$  in  $B_1, \dots, B_6$  und  $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_6$ , ziehe die Geraden  $B_1\mathfrak{B}_1, \dots, B_6\mathfrak{B}_6$ , so bestimmen diese mit  $g$  und  $g$  eine Schaar von Curven dritter Classe, die noch eine neunte gemeinschaftliche Tangente haben, welche  $g$  und  $g$  in  $B_7$  und  $\mathfrak{B}_7$  schneidet. Der Schnittpunkt der Geraden  $SB_7$  und  $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_7$  ist ein allen Curven gemeinsamer Punkt. Hieraus folgt für Curven, welche durch projectivische Involutionen erzeugt sind:

3. Durch acht Punkte lässt sich nur eine Curve vierter Ordnung legen, welche zwei gegebene Punkte zu Doppelpunkten hat.

Alle Curven vierter Ordnung, welche zwei gegebene Punkte zu Doppelpunkten und sieben gemeinschaftliche Punkte haben, schneiden sich noch in einem achten Punkte.

Ist  $A$  irgend ein Punkt von  $K^4$  und man dreht die erzeugenden involutorischen Strahlenbüschel um  $S$  und  $\mathfrak{S}$  so weit, dass  $SA$  und  $\mathfrak{S}A$  in eine Gerade zusammenfallen, so ist der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare eine Curve  $\mathfrak{K}^3$  dritter Ordnung. Jedem Punkte der einen Curve entspricht ein bestimmter der andern und umgekehrt.  
Auf  $K^4$                      $\rightarrow$  zwei beliebige Punkte  $M, N$ , deren entsprechende

$\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  sein mögen; ist dann  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{R}^3$  der gegenüberliegende Punkt der Punkte  $S \in \mathfrak{M} \mathfrak{N}$ , so kann man sich  $\mathfrak{R}^3$  erzeugt denken durch die projectivischen Büschel  $(S \in \mathfrak{M} \mathfrak{N})$  und  $(\mathfrak{P})$ . Alle Elemente der beiden Büschel werden von  $S$  und  $\mathfrak{S}$  durch projectivische Strahlenbüschel projecirt; dreht man nun wieder die Involutionen in  $S$  und  $\mathfrak{S}$  und sämtliche ebengenannten Strahlenbüschel um  $S$  und  $\mathfrak{S}$  so, dass die in  $S \in$  vereinigten Strahlen sich in  $A$  schneiden, so werden die Kegelschnitte des Büschels  $(S \in \mathfrak{M} \mathfrak{N})$  in die Kegelschnitte des Büschels  $(S \in \mathfrak{M} \mathfrak{N})$  und die Strahlen des Büschels  $(\mathfrak{P})$  in die Kegelschnitte des Büschels  $(S \in AP)$  sich verwandeln und die projectivischen Büschel  $(S \in \mathfrak{M} \mathfrak{N})$  und  $(S \in AP)$  müssen die Curve  $K^4$  erzeugen. Da  $AMN$  beliebige Punkte derselben sind, so folgt der Satz:

4. Die Curve  $K^4$ , der geometrische Ort der homologen Strahlenpaare projectivischer Involutionen, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden, welche die Scheitel der Involutionen zu gemeinschaftlichen Grundpunkten haben. Von den anderen vier Grundpunkten können drei auf  $K^4$  beliebig gewählt werden.

Die Strahlen  $a$  und  $a_1$  eines Strahlenpaares von  $(S)$  werden von den Strahlenpaaren von  $(\mathfrak{S})$  in den Punktpaaren zweier projectivischen Involutionen geschnitten, in denen  $S$  ein sich selbst entsprechender Punkt ist. Daher werden die Verbindungslinien homologer Punktpaare von einer Curve dritter Classe eingehüllt, die aber in den Punkt  $\mathfrak{S}$  und einen Kegelschnitt  $[aa_1]$  zerfällt, welcher die Geraden  $a$  und  $a_1$  und die beiden Doppelstrahlen  $d'd''$  des Büschels  $(\mathfrak{S})$  berührt. Wählen wir  $bb_1, cc_1, \dots$ , so erhalten wir andere Kegelschnitte  $[bb_1], [cc_1], \dots$ , welche sämtlich  $d'd''$  zu Tangenten haben. Wenn wir aber die Strahlenpaare von  $(\mathfrak{S})$  durch die von  $(S)$  schneiden, so entstehen auf dieselbe Art Kegelschnitte  $[aa_1], [bb_1], [cc_1], \dots$ , welche die Doppelstrahlen  $d'd''$  von  $(S)$  berühren. Die Kegelschnitte  $[aa_1]$  und  $[aa_1]$  haben die Geraden, welche die Punkte  $(aa)$  und  $(a_1a)$ ,  $(aa_1)$  und  $(a_1a)$  verbinden, zu gemeinschaftlichen Tangenten; die beiden anderen gemeinschaftlichen Tangenten sind die Verbindungslinien  $d'd''$  der Punktpaare  $(d'd'')$ ,  $(d''d')$  und  $(d'd')$ ,  $(d''d'')$ . Also bilden alle Kegelschnitte  $[aa_1], [bb_1], \dots$  eine Schaar von vier festen Tangenten  $d'd''d'd''$  und alle Kegelschnitte  $[aa_1], [bb_1], \dots$  eine Schaar von vier festen Tangenten  $d'd''d'd''$ . Diese beiden Kegelschnittschaaren stehen aber in projectivischer Beziehung, wenn wir je zwei Kegelschnitte, wie  $[aa_1]$  und  $[aa_1]$ ,  $[bb_1]$  und  $[bb_1]$ , ... einander zuordnen, und ihre gemeinschaftlichen Tangenten werden daher von einer Curve  $K_4$  vierter Classe eingehüllt, welche  $d'd''$  zu Doppeltangenten hat. Dabei schneiden sich die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier homologen Kegelschnitte auf einem Kegelschnitte  $\mathfrak{R}^2$ . Es bilden die



auf eine Curve dritter Ordnung und die Gerade  $S\mathfrak{S}$ . Es entsteht die Frage, ob man noch auf andere Arten projectivische Beziehungen zwischen den Involutionen herstellen kann, derart, dass der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare eine Curve dritter Ordnung wird. Und in der That kann man noch auf zwei verschiedene Arten die Strahlenpaare projectivisch einander so zuordnen, dass sich die homologen Elemente auf einer Curve dritter Ordnung schneiden, die jedoch in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Die Doppelstrahlenpaare  $d'd''$  und  $b'b''$  bilden ein Viereck, dessen Diagonalen  $\delta'\delta''$  sind. Auf jeder derselben schneiden sich die Strahlenpaare beider Involutionen. Denn nennen wir  $D'$  und  $D''$  die Schnittpunkte  $(d'b')$  und  $(d''b'')$ , so ist  $D'D''$  die Diagonale  $\delta'$  und es trennen diese Punkte die Schnittpunkte von  $\delta'$  mit je zwei Strahlen irgend eines Paares harmonisch, und in jedem solchen Punktpaare müssen sich deshalb die Strahlen von zwei Paaren der Büschel  $(S)$  und  $(\mathfrak{S})$  treffen. Dasselbe gilt von  $\delta''$ . Ordnet man je zwei Strahlenpaare einander zu, die sich auf  $\delta'$  schneiden, so hat man zwischen den Involutionen eine projectivische Beziehung hergestellt, in welcher der gemeinschaftliche Strahl  $S\mathfrak{S}$  sich selbst entspricht. Es ist daher die Ortscurve von der dritten Ordnung und da die Gerade  $\delta'$  ein Theil derselben ist, so muss der andere Theil ein Kegelschnitt sein, welcher durch  $S$  und  $\mathfrak{S}$  geht; da also die Schnittpunkte homologer Strahlen auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen die Verbindungslinien derselben sich in einem Punkte schneiden. Es folgt:

6. Wenn man die Strahlenpaare zweier Involutionen auf alle möglichen Arten einander projectivisch zuordnet, so giebt es drei Arten der Zuordnung, bei welchen der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente in die Verbindungslinie der Scheitel und in eine Curve dritter Ordnung zerfällt, welche letztere in zwei Fällen wieder in eine Gerade und einen Kegelschnitt degenerirt. In den letzten Fällen zerfällt die Curve  $K_3$  dritter Classe, die Enveloppe der Verbindungslinien der Schnittpunkte homologer Elemente, in einen Kegelschnitt und einen Punkt.

Es giebt drei Punktpaare, welche in Bezug auf alle Strahlenpaare beider Büschel zugleich conjugirte Pole sind, nämlich die Scheitel  $S\mathfrak{S}$  und die Endpunkte  $D'D''$  und  $\mathfrak{D}'\mathfrak{D}''$  der beiden Diagonalen  $\delta'$  und  $\delta''$  desjenigen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte der beiden Doppelstrahlenpaare der Involutionen sind.

Hier sei es mir erlaubt, auf einen Irrthum aufmerksam zu machen, der von Herrn Durège auf S. 84 des 5. Bandes der mathematischen Annalen in der Abhandlung „Ueber die Curve dritter Ordnung, welche

den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschaar bildet“, begangen zu sein scheint, indem er behauptet, dass das Punktpaar  $S\mathfrak{S}$  das einzige wäre, welches in Bezug auf alle Strahlenpaare beider Büschel ein Paar von conjugirten Polen bildet.

Die Strahlenpaare  $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$  der Involution  $(S)$  sind in projectivischer Beziehung mit den Diagonalenpaaren  $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \dots$  der von entsprechenden Strahlenpaaren, wie  $aa_1$  und  $\alpha\alpha_1, bb_1$  und  $\beta\beta_1, cc_1$  und  $\gamma\gamma_1, \dots$  gebildeten Vierecke und daher auch mit den Schnittpunkten  $A, B, \Gamma, \dots$  der einzelnen Diagonalenpaare. Wir schneiden eine Gerade  $l$  durch  $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$  in  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ , so ist, für den Fall, dass  $S\mathfrak{S}$  sich selbst entspricht,

$$k(A, B, \Gamma, \dots) \bar{\wedge} l(AA_1, BB_1, CC_1, \dots).$$

Die Enveloppe der Geraden, welche homologe Elemente verbinden, ist eine Curve dritter Classe  $\mathfrak{C}_3$ , welche  $k$  berührt und  $l$  zur Doppeltangente hat. Sie hat mit  $K_3$  ausser  $k$  noch acht gemeinschaftliche Tangenten, so dass der Ort der Schnittpunkte homologer Strahlenpaare  $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$  und  $\alpha\alpha_1, \beta\beta_1, \gamma\gamma_1, \dots$  eine Curve achter Ordnung ist. In unserem Falle zerfällt dieselbe aber in die Curve  $K^3$ , die durch die Involutionen  $(S)$  und  $(\mathfrak{S})$  erzeugt ist, den gemeinsamen Strahl  $S\mathfrak{S}$  und die Doppelstrahlen  $d, d'$ , von denen jeder doppelt zu zählen ist.

Es lässt sich nun erkennen, dass die Curven  $K^3$  und  $K_3$  sich in neun Punkten berühren. Irgend ein Strahl durch  $S$  schneide  $K_3$  in sechs Punkten; die Tangenten in diesen werden von einem Kegelschnitt  $K_2$  berührt. Jedem Strahl durch  $S$  ordnen wir auf diese Art einen Kegelschnitt zu und alle diese Kegelschnitte, welche eine Schaar von vier festen Tangenten bilden, sind involutorisch geordnet, da sie eindeutig den Strahlen von  $(S)$  entsprechen. Deshalb ist auch diese involutorische Kegelschnittschaar projectivisch auf die Punktreihe  $AB\Gamma\dots$  bezogen. Die Enveloppe der von  $AB\Gamma\dots$  an die homologen Kegelschnitte gezogenen Tangenten ist eine Curve  $\mathfrak{C}_6$  fünfter Classe, welche mit  $K_3$  15 gemeinschaftliche Tangenten hat. Von diesen scheide man die Geraden  $k$  und  $S\mathfrak{S}$  und die doppelt zu zählenden Geraden  $d$  und  $d'$  aus, so bleiben noch neun übrig. Eine von ihnen sei  $\tau$ , der sie berührende Kegelschnitt  $K_\tau$  der Schaar entspreche dem Strahl  $t$  von  $(S)$  und deshalb muss der Pol von  $\tau$  in Bezug auf diesen Kegelschnitt auf  $t$  liegen. Er liegt aber auch auf  $K_3$  und auf  $K_\tau$ ; daher berühren sich in ihm  $K_3$  und  $K_\tau$ . Weil sich in ihm aber auch  $t$  und  $\tau$  schneiden, so geht  $K^3$  durch ihn hindurch. Dass  $K^3$  in diesem Punkte auch von  $\tau$  berührt wird, ergiebt sich aus folgender Ueberlegung. Es sei  $\mathfrak{A}$  der Schnittpunkt zweier homologen Strahlen  $\alpha$  und  $\alpha_1$ ; es seien ferner  $\alpha'$  und  $\alpha'_1$  die den obigen Strahlen unendlich benachbarten, die einander auch entsprechen müssen, und  $\mathfrak{A}'$  sei ihr Schnittpunkt. so ist die Gerade  $\mathfrak{A}\mathfrak{A}'$  die Tangente in  $\mathfrak{A}$  an  $K^3$ . Wir

$\mathfrak{A}'\dots$ , so ist

$$l(AB\Gamma\dots) \bar{\wedge} \mathfrak{U}(AB\Gamma\dots) \bar{\wedge} S(aa_1, bb_1, cc_1, \dots).$$

Der Strahl, welcher in  $(\mathfrak{U})$  der Tangente  $\alpha$  unendlich benachbart ist, hat einen ihm projectivisch entsprechenden Strahl in  $(S)$ , welcher dem Strahl  $a$  unendlich nahe liegt. Diese beiden Strahlen sind  $\alpha'$  und  $\alpha''$ ; sie schneiden sich in  $\mathfrak{U}'$  auf der Curve dritter Ordnung  $\mathfrak{U}^3$  mit dem Doppelpunkte  $S$ , welche von den Büscheln  $(\mathfrak{U})$  und  $(S)$  erzeugt wird. Auf dieser liegt auch der Schnittpunkt  $\mathfrak{U}$  von  $a$  und  $\alpha$ , so dass also die Gerade  $\mathfrak{U}\mathfrak{U}'$  oder  $\alpha$  gleichzeitig Tangente an  $\mathfrak{U}^3$  und  $K^3$  ist.

Wenn der Schnittpunkt  $\mathfrak{U}$  von  $\alpha$  und  $a$  der Berührungspunkt von  $\alpha$  mit  $K_3$  ist, so müssen sich in diesem Punkte die drei Curven  $K_3, K^3, \mathfrak{U}^3$  berühren, weil jede in ihm die Gerade  $\alpha$  berührt. Dies ist aber der Fall mit den gemeinschaftlichen Tangenten von  $C_3$  und  $K_3$ .

Die Curve  $K_3$  heisst die Cayley'sche Curve von  $K^3$ , so dass wir auch auf diesem Wege zu dem bekannten Satze gekommen sind, dass die Cayley'sche Curve einer Curve dritter Ordnung dieselbe in allen Punkten berührt, welche sie mit ihr gemeinsam hat.

7. Legt man durch die Schnittpunkte der homologen Kegelschnitte projectivischer Büschel andere Kegelschnittbüschel, so lassen sich die Kegelschnitte derselben unendlich oft so zu neuen Büscheln gruppieren, dass zu jedem solchen aus jedem der vorigen Büschel ein Kegelschnitt gehört.

Die projectivischen Kegelschnittbüschel  $(ABCD)\{\kappa^2\kappa_1^2\kappa_2^2\dots\}$  und  $(A'B'C'D')\{\lambda^2\lambda_1^2\lambda_2^2\dots\}$  erzeugen eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung, welche durch die acht Grundpunkte  $ABCD A'B'C'D'$  geht. Alle Kegelschnitte  $\kappa^2\kappa_1^2\dots$  schneiden  $\lambda^2$  in solchen Punktgruppen von je vier Punkten, dass deren sechs Verbindungslinien eine Curve  $L_3$  dritter Classe einhüllen, die auch die sechs Geraden, welche die vier Punkte  $ABCD$  verbinden, zu Tangenten hat. Denn der Kegelschnitt  $\lambda^2$  constituirt mit dem Büschel  $(\kappa^2\kappa_1^2\dots)$  ein Kegelschnittnetz und die Geradenpaare, welche zu den Kegelschnitten desselben gehören, haben als Enveloppe eine Curve dritter Classe, die Cayley'sche Curve des Netzes. Lassen wir  $\kappa^2$  von den Kegelschnitten  $\lambda^2\lambda_1^2\dots$  geschnitten werden, so erhalten wir auf dieselbe Art eine Curve  $K_3$  dritter Classe, welche die sechs Verbindungslinien der Punkte  $A'B'C'D'$  berührt. Beide Curven haben neun gemeinschaftliche Tangenten; sechs von ihnen sind die Geraden, welche die vier Schnittpunkte von  $\kappa^2$  und  $\lambda^2$  verbinden. Sind  $t_1 t_2 t_3$  die drei anderen, so schneiden sich auf jeder von ihnen zweimal zwei Kegelschnitte in je zwei Punkten. Da nämlich  $t_1$  eine Tangente von  $L_3$  ist, so liegen auf ihr zwei Schnittpunkte  $MN$  von  $\lambda^2$  und einem Kegelschnitt des Büschels  $(ABCD)$ , z. B.  $\kappa_m^2$ ; da aber  $t_1$  auch Tangente von  $K_3$  ist, so muss in zweien ihrer Punkte  $M'N'$  auch  $\kappa^2$  von einem Kegelschnitte  $\lambda_n^2$  des andern Büschels geschnitten werden. Es wird  $t_1$  von den Kegelschnitten





$(E_1 F_1 G_1 H_1), (E_2 F_2 G_2 H_2), (E_3 F_3 G_3 H_3), \dots$ , so liegen sie sämtlich in einem Kegelschnitt  $\mathcal{R}^2$ . Denn die Strahlenbüschel der Polaren von bezüglich  $(ABCD)$  und  $(A'B'C'D')$  sind die Geraden  $\mathfrak{A}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\dots)$  und  $\mathfrak{A}'(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3\dots)$  und erzeugen, da sie projectivisch sind, einen Kegelschnitt  $\mathcal{R}^2$ . Es bilden aber auch die Polaren von  $P$  bezüglich der Kegelschnitte der Büschel  $(EFGH), (E_1 F_1 G_1 H_1), (E_2 F_2 G_2 H_2)$  drei projective Strahlenbüschel  $\mathfrak{E}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\dots), \mathfrak{E}_1(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\dots), \mathfrak{E}_2(\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''\mathfrak{A}''_1\dots)$  und erzeugen also denselben Kegelschnitt  $\mathcal{R}^2$ . Wenn wir die Kegelschnitte des Büschels  $(A'B'C'D')$  mit  $\pi^2 \pi_1^2 \pi_2^2 \dots$  bezeichnen, so ist

$$(\pi^2 \pi_1^2 \pi_2^2 \pi_3^2) \overline{\wedge} (\lambda^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2) \overline{\wedge} (\mathfrak{E} \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_3) \overline{\wedge} (\pi^2 \pi_1^2 \pi_2^2 \pi_3^2).$$

Lassen wir  $P$  in  $P'P''\dots$  sich ändern, so ändern sich  $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}'\mathfrak{E}'_1\mathfrak{E}'_2\mathfrak{E}'_3, \mathfrak{E}''\mathfrak{E}''_1\mathfrak{E}''_2\mathfrak{E}''_3, \dots$  und es sind  $P$  und  $\mathfrak{E}_3, P'$  und  $\mathfrak{E}'_3, P''$  und  $\mathfrak{E}''_3, \dots$  conjugirte Punkte in Bezug auf die drei Kegelschnitte  $\pi^2 \lambda^2 \pi$  und deshalb müssen diese drei Kegelschnitte sich in denselben vier Punkten, also in  $E_3 F_3 G_3 H_3$  schneiden. In gleicher Weise zeigt man, dass die Kegelschnitte der Büschel  $(A'B'C'D'), (A'_1 B'_1 C'_1 D'_1), \dots$  durch die Schnittpunkte  $(E_3 F_3 G_3 H_3), (E_4 F_4 G_4 H_4), \dots$  je zweier homologer Kegelschnitte der Büschel  $(ABCD)$  und  $(A'B'C'D')$  hindurchgehen.

Anderer Beweis. Eine beliebige Gerade  $g$  werde durch ein Schnittpunkt  $Q$  zweier homologen Kegelschnitte  $\pi^2$  und  $\lambda^2$  gezogen und von  $\pi^2, \pi_1^2, \pi_2^2, \dots, \pi_q^2$  und  $\lambda^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_q^2$  in den Involutionen  $KK', K_1 K'_1, K_2 K'_2, \dots, QK'_q$  und  $LL', L_1 L'_1, L_2 L'_2, \dots, QL'_q$  geschnitten. Ein gemeinschaftliche Punktpaar beider Involutionen sei  $MM'$  und durch dasselbe  $M^2$  ein beliebiger Kegelschnitt, welcher  $\pi^2$  in  $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$  und  $\lambda^2$  in  $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$  schneidet. Diese Punktgruppen sehen wir als Grundpunkte zweier Kegelschnittbüschel  $(\pi^2 K_1^2 K_2^2 \dots M^2)$  und  $(\lambda^2 L_1^2 L_2^2 \dots M^2)$  an, welche in denselben Involutionen schneiden müssen. Wenn wir den Punktpaaren dieser Involutionen die durch sie gehenden Kegelschnitte zusammenfassen, so muss, da

$$(KK', K_1 K'_1, \dots) \overline{\wedge} (LL', L_1 L'_1, \dots)$$

ist, auch

$$(\pi^2, K_1^2, \dots) \overline{\wedge} (\lambda^2, L_1^2, \dots)$$

sein. Diese Büschel erzeugen also eine Curve  $\mathcal{R}^4$  vierter Ordnung, die  $g$  in denselben vier Punkten wie  $K^4$  trifft; da die Grundpunkte der Büschel, welche  $\mathcal{R}^4$  erzeugen, auf einem Kegelschnitt  $M^2$  liegen, so kann die Curve auch durch zwei Kegelschnittbüschel erzeugt werden, deren Grundpunkte die Schnittpunkte  $EFGH$  und  $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}$  von  $\pi^2 \lambda^2$  und  $K_1^2 L_1^2$  sind. Dies ergibt sich daraus, dass man die Büschel  $(\pi^2 \pi_1^2 \dots)$  und  $(\lambda^2 \lambda_1^2 \dots)$  und die von ihnen erzeugte Curve projectivisch auf zwei Strahlenbüschel und den von ihnen erzeugten Kegelschnitt bezieht. Wenn  $QQ'$  und  $Q_1 Q'_1$  die Schnittpunkte von  $g$  mit den durch  $EFGHQ$  und  $\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H}Q$  bestimmten Kegelschnitten sind, so sind die Involutionen  $KK', LL', QQ', \dots$  und  $K_1 K'_1, L_1 L'_1, Q_1 Q'_1, \dots$  in projectivischer Beziehung und haben die



mente eine Curve  $\mathcal{R}^3$  dritter Ordnung. Diese kann auf unzählige Arten durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugt werden. Wir wählen auf  $\mathcal{R}^4$  zwei ganz beliebige Punkte  $M$  und  $N$ , so ist durch deren entsprechende  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  auf  $\mathcal{R}^3$  und durch  $A$  und  $B$  ein Kegelschnittbüschel bestimmt; die Kegelschnitte desselben treffen  $\mathcal{R}^3$  in solchen Punktpaaren, dass die Verbindungslinien der Punkte der einzelnen Paare sich in einem Punkte  $\mathfrak{P}$  von  $\mathcal{R}^3$  schneiden. Es werden die Elemente der beiden Büschel  $(AB\mathfrak{M}\mathfrak{N})$  und  $(\mathfrak{P})$  aus  $A$  und  $B$  durch Strahlenbüschel erzeugt, und wenn wir alle diese Büschel um  $A$  und  $B$ , indem ihre gegenseitige Lage durchaus ungeändert bleibt, so drehen, dass die in  $AB$  vereinigten Strahlen sich in  $D'$  schneiden, so verwandeln sich die Büschel  $(AB\mathfrak{C}\mathfrak{D})$  und  $(\mathfrak{C}')$  wieder in  $(ABCD)$  und  $(ABC'D')$  und erzeugen  $K^4$ ; aber die Büschel  $(AB\mathfrak{M}\mathfrak{N})$  und  $(\mathfrak{P})$ , welche  $\mathcal{R}^3$  erzeugten, verwandeln sich in  $(ABMN)$  und  $(ABPD')$  und diese müssen natürlich auch  $K^4$  erzeugen, womit gezeigt ist, dass man zu Grundpunkten des einen erzeugenden Büschels ausser  $AB$  zwei ganz beliebige Punkte von  $K^4$  wählen kann. Im andern Büschel aber ist  $D'$  als ein beliebiger Punkt anzusehen. Denn legt man durch die beiden Schnittpunkte, in denen irgend ein Kegelschnitt des Büschels  $(ABMN)$  die Curve  $K^4$  schneidet, ferner durch  $AB$  und irgend einen Punkt  $X$  von  $K^4$  einen Kegelschnitt, welcher  $K^4$  noch in  $Y$  schneiden mag, so kann  $K^4$  auch erzeugt werden durch die beiden Büschel  $(ABMN)$  und  $(ABXY)$ . Hieraus aber folgt der Satz:

8b. Wenn eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten  $A$  und  $B$  durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel, welche  $A$  und  $B$  als gemeinsame Doppelpunkte haben, erzeugt ist, so kann sie auf unendlich viele Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden. Die beiden Grundpunkte, ausser  $A$  und  $B$ , des einen Büschels und einen des andern kann man beliebig auf der Curve annehmen. Dadurch aber ist der letzte Grundpunkt des zweiten Büschels bestimmt.

Soll man durch sieben Punkte  $CDEFGHJ$  eine Curve vierter Ordnung legen, welche zwei gegebene Punkte  $A$  und  $B$  zu Doppelpunkten hat, so hat man nach dem Vorigen einen Punkt  $X$  zu suchen, welcher der Bedingung genügt, dass

$$(ABCD)\{F, G, H, J\} \overline{\wedge} (ABEX)\{F, G, H, J\}$$

ist. Es giebt unendlich viele Punkte, welche dieser Bedingung genügen; sie liegen sämmtlich auf einer Curve vierter Ordnung, welche durch  $FGHJ$  geht und  $ABE$  zu Doppelpunkten hat. Daher giebt es unendlich viele Curven vierter Ordnung, welche  $A$  und  $B$  zu Doppelpunkten haben und durch  $CDEFGHJ$  gehen. Wir denken uns wieder die Kegelschnitte aller Büschel, welche diese Curven erzeugen, durch projectivische Strahlenbüschel projectirt und diese um  $A$  und  $B$  unter Festhaltung ihrer ge-



einer dazu projectivischen Punktreihe geschnitten. Von ihren Doppelpunkten fällt einer auf  $F_2$ , die anderen sind die Schnittpunkte von  $t_2$  mit der Curve vierter Ordnung. Die Schnittpunkte von  $t_2$  mit der Curve vierter Ordnung sind erstens die beiden Schnittpunkte von  $t_2$  mit  $\kappa_2^2$ , ferner die drei Doppelpunkte der genannten Punktreihen. Einer von diesen liegt stets auf  $CD$ . Von den beiden anderen fällt einer mit dem Schnittpunkte  $F_2$  von  $t_2$  und  $\kappa_2^2$  zusammen, so dass also in  $F_2$  zwei Punkte der Curve sich vereinigen und in  $F_2$  die Curve vierter Ordnung von  $\mathbb{R}_2^2$  und  $t_2$  berührt wird. Auf dieselbe Art folgt, dass sich in  $F_3, F_4, F_5$  die Curve vierter Ordnung und  $\mathbb{R}^2$  berühren.

Hieraus lässt sich auf die Natur der beiden Doppelpunkte schliessen. Wir legen durch  $A$  eine beliebige Gerade  $a$  und suchen ihre Schnittpunkte mit der Curve vierter Ordnung. Auf  $a$  sei  $P$  ein beliebiger Punkt; von ihm lassen sich zwei Tangenten  $p$  und  $p'$  an  $\mathbb{R}^2$  ziehen, denen zwei Kegelschnitte  $\kappa_p^2$  und  $\kappa_{p'}^2$  entsprechen, welche  $a$  noch in  $Q_p$  und  $Q_{p'}$  schneiden. Ändert sich  $P$  auf  $a$ , so werden  $Q_p$  und  $Q_{p'}$  die Punktpaare einer zur Punktreihe  $P...$  projectivischen Involution durchlaufen, weil die Tangenten  $pp'$  eine Involution bilden. Von den drei Doppelpunkten der Reihen ( $P...$ ) und ( $Q_p Q_{p'}, ...$ ) fällt einer auf  $CD$ , die anderen sind die Durchschnitte von  $a$  mit der Curve vierter Ordnung. Wählt man an Stelle der beliebigen Geraden  $a$  eine der beiden Tangenten von  $A$  an  $\mathbb{R}^2$ , z. B.  $t_a$ , und ist  $\kappa_{t_a}^2$  der ihr entsprechende Kegelschnitt und  $\tau_a$  die Tangente an denselben in  $A$ , so ist  $A$  einer der Schnittpunkte von  $\tau_a$  mit der Curve vierter Ordnung, also  $\tau_a$  eine Tangente in  $A$  an diese Curve. Ebenso folgt, dass es noch eine andere Tangente  $A$  an die Curve giebt. Diese beiden Tangenten heissen die Doppelpunktstangenten. Im Punkte  $B$  giebt es natürlich auch zwei Doppelpunktstangenten. Wir schliessen:

10. In jedem der Doppelpunkte lassen sich zwei Tangenten an die Curve vierter Ordnung ziehen, wenn diese Punkte ausserhalb  $\mathbb{R}^2$  liegen. Liegt einer von ihnen auf  $\mathbb{R}^2$ , so ist er eine Spitze, und liegt er innerhalb  $\mathbb{R}^2$ , so ist er ein uneigentlicher Doppelpunkt.

Wir denken uns in  $A$  und  $B$  die beiden projectivischen Strahleninvolutionen, welche die Curve  $K^4$  projiciren. Es seien  $a_{12}$  und  $a'_{12}$  die beiden Doppelstrahlen von ( $A$ ); ihnen entsprechen in ( $B$ ) die Strahlenpaare  $b_1 b_2$  und  $b'_1 b'_2$ . Diese sind die vier Tangenten, welche sich von  $B$  an  $K^4$  ziehen lassen. Ebenso folgt, dass sich von  $A$  vier Tangenten an  $K^4$  ziehen lassen. Also:

11. Von jedem der Doppelpunkte lassen sich an die Curve  $K^4$  vier Tangenten ziehen.

Mit Hilfe von 8 lässt sich der Satz beweisen:

12. Wenn eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt ist, so wird



$$P_0 P'_0, P_1 P'_1, P_2 P'_2, \dots$$

und den zu ihr projectivischen Reihen

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}'_0, \mathfrak{P}''_0, \dots M', M'', \\ & \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}''_1, \dots M', M'', \\ & \dots \end{aligned}$$

In gleicher Weise werden durch das Kegelschnittbüschel  $(B_1 \dots B_n)$  und das zu ihm projectivischen Strahlenbüschel  $(B'_0), (B'_1), \dots$  auf  $g$  die Involution

$$O_0 Q'_0, Q_1 Q'_1, Q_2 Q'_2, \dots$$

und die projectivischen Punktreihen

$$\begin{aligned} & \Omega_0, \Omega'_0, \Omega''_0, \dots, N', N'', \\ & \Omega_1, \Omega'_1, \Omega''_1, \dots, N', N'', \\ & \dots \end{aligned}$$

bestimmt.

Einen beliebigen Punkt  $\Delta$  verbinde man mit den beiden Involutionen auf  $g$ ; irgend zwei Gerade  $l_1$  und  $l_2$  durch  $\Delta$  treffen  $g$  in zwei Punkten, die  $P_a$  und  $P_b$  oder  $Q_c$  und  $Q_d$  heissen mögen, je nachdem sie der ersten oder zweiten Involution angehören. Ihnen entsprechen  $\mathfrak{P}_0^{(a)}$  und  $\mathfrak{P}_0^{(b)}$  oder  $\Omega_0^{(c)}$  und  $\Omega_0^{(d)}$ . Auf diesen Geraden  $l_1$  und  $l_2$  nehme man zwei beliebige Punkte  $C_1$  und  $C_2$ , ziehe  $\mathfrak{P}_0^{(a)} C_1$  und  $\mathfrak{P}_0^{(b)} C_2$ , die sich in  $D_0$ , ferner  $\Omega_0^{(c)} C_1$  und  $\Omega_0^{(d)} C_2$ , die sich in  $E_0$  schneiden mögen, dann erzeugen die Büschel

$$\begin{aligned} & \Delta(P_0 P'_0, P_1 P'_1, \dots) \text{ und } D_0(\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}'_0, \dots), \\ & \Delta(Q_0 Q'_0, Q_1 Q'_1, \dots) \text{ und } E_0(\Omega_0, \Omega'_0, \dots) \end{aligned}$$

zwei Curven dritter Ordnung  $\delta_0^3$  und  $\varepsilon_0^3$ , die  $\Delta$  zum gemeinsamen Doppelpunkte haben und durch die Punkte  $C_1$  und  $C_2$  gehen. — Man lege nun durch  $M' M'' C_1 C_2 D_0$  einen Kegelschnitt  $D^2$ , so ist zwischen seinen Punkten und denen von  $g$  eine projectivische Beziehung dadurch hergestellt, dass den Punkten  $\mathfrak{P}_0^{(a)} \mathfrak{P}_0^{(b)} M' M''$  von  $g$  die Punkte  $C_1 C_2 M' M''$  von  $D^2$  zugeordnet sind. Deshalb muss die Punktreihe auf  $D^2$  auch mit den Punktreihen

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}''_1, \dots, M', M''$$

in projectivischer Beziehung und perspectivischer Lage sich befinden. Sind  $D_1, D_2, \dots$  die perspectivischen Centra, so erzeugen die Büschel  $(D_1), (D_2), \dots$  mit der Involution  $\Delta(P_0 P'_0, \dots)$

Curven dritter Ordnung  $\delta_1^3, \delta_2^3, \dots$ , die mit  $\delta_0^3$  zu einem Büschel gehören, welches  $C_1$  und  $C_2$  zu zwei Grundpunkten und  $\Delta$  zum gemeinsamen Doppelpunkt hat.

Durch die Punkte  $N' N'' C_1 C_2 E_0$  ist ein Kegelschnitt  $E^2$  bestimmt, dessen Punkte mit den Punkten  $\Omega_0 \Omega'_0 \dots$  von  $g$  in projectivische Beziehung dadurch gebracht sind, dass den Punkten  $\Omega_0^{(c)} \Omega_0^{(d)} N' N''$  von  $g$  die Punkte  $C_1 C_2 N' N''$  von  $E^2$  zugeordnet sind. Diese Punktreihe auf  $E^2$  muss mit den Punktreihen





Die projectivischen Curvenbüschel seien  $(\alpha_0^3 \dots)$  und  $(\beta_0^3 \dots)$ ; durch die Punktgruppen, in denen die Curven eine beliebige Gerade  $g$  schneiden, und drei feste Punkte  $C_1 C_2 C_3$  lege man Curven dritter Ordnung, welche einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt  $\Delta$  haben, so erhält man zwei neue projectivische Curvenbüschel  $(\Delta \Delta C_1 C_2 C_3 C_4 C_5)$  und  $(\Delta \Delta C_1 C_2 C_3 C'_4 C'_5)$ . Jede dieser Curven kann man sich erzeugt denken durch eine Involution in  $\Delta$  und ein projectivisches Büschel in  $C_1$ ; die Gerade  $g$  wird aus  $\Delta$  und  $C_1$  durch zwei projectivische Büschel projecirt. Dreht man sämtliche Büschel um  $\Delta$  und  $C_1$ , bis die Strahlen  $\Delta C_2$  und  $C_1 C_2$  mit  $\Delta C_1$  zusammenfallen, so erzeugen sie in der neuen Lage zwei Kegelschnittbüschel  $(\Delta \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_4 \mathfrak{C}_5)$  und  $(\Delta \mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}'_4 \mathfrak{C}'_5)$  und einen Kegelschnitt  $\gamma^2$  durch  $\Delta C_1$ . Die beiden Büschel sind in projectivischer Beziehung und erzeugen eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung mit den Doppelpunkten  $\Delta$  und  $\mathfrak{C}_3$ , welche  $\gamma^2$  noch in sechs Punkten schneidet. Die diesen verwandten Punkte auf  $g$  sind solche, in denen sich homologe Curven der Büschel  $(\alpha^3 \dots)$  und  $(\beta^3 \dots)$  schneiden. Daher ist die von diesen Curven erzeugte Curve von der sechsten Ordnung.

15. Die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Kegelschnitte zweier projectivischen Kegelschnittbüschel verbinden, werden von einer Curve sechster Classe mit drei Doppeltangenten eingehüllt und schneiden sich in den Punkten einer Curve sechster Ordnung mit sechs Doppelpunkten.

Sind  $(ABCD)\{\kappa^2 \kappa_1^2 \dots\}$  und  $(A'B'C'D')\{\lambda^2 \lambda_1^2 \dots\}$  die projectivischen Kegelschnittbüschel, so wird  $\kappa^2$  von allen Kegelschnitten des andern Büschels in solchen Punktgruppen geschnitten, dass die Verbindungslinien derselben von einer Curve dritter Classe  $K_3$  eingehüllt werden, welche auch die sechs Verbindungslinien der Punkte  $A'B'C'D'$  berührt. In gleicher Weise wird  $\lambda^2$  von allen Kegelschnitten des andern Büschels in solchen Punktgruppen geschnitten, dass deren Verbindungslinien von einer Curve  $L_3$  eingehüllt werden, welche die Verbindungslinien der Punkte  $ABCD$  berührt. Diese beiden Curven haben die drei Geraden  $t_1 t_2 t_3$ , welche von beiden Büscheln in denselben Involutionen geschnitten werden, zu gemeinschaftlichen Tangenten und ausserdem die sechs Verbindungslinien der Schnittpunkte von  $\kappa^2$  und  $\lambda^2$ . Je zwei homologe Kegelschnitte liefern zwei homologe Curven zweier Curvenschaaren dritter Classe, von denen die eine Schaar die Geraden  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$  und  $t_1 t_2 t_3$ , die andere  $A'B', A'C', A'D', B'C', B'D', C'D'$  und  $t_1 t_2 t_3$  zu Grundtangente hat. Die übrigen gemeinschaftlichen Tangenten werden daher (vergl. 14) von einer Curve  $C_6$  sechster Classe eingehüllt, welche  $t_1 t_2 t_3$  zu Doppeltangenten hat.

Der Kegelschnitt  $\kappa^2$  constituirt mit dem Büschel  $(\lambda^2 \lambda_1^2 \dots)$  ein *Kegelschnittnetz*; die Scheitel der im Netze vorkommenden Geradenpaare liegen



Die Punkte  $T_1T'_1, T_2T'_2, T_3T'_3$  sind die Gegenecken eines vollständigen Vierseits.

Eine Curve sechster Ordnung, welche die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits zu Doppelpunkten hat, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel von Curven dritter Ordnung erzeugt werden.

Wenn eines der beiden Kegelschnittbüschel in eine Strahleninvolution übergeht, so erleiden die vorigen Sätze einige Modificationen.

Der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente eines involutorischen Strahlenbüschels ( $A$ ) und eines zu ihm projectivischen Kegelschnittbüschels ist eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung, welche  $A$  zum Doppelpunkte hat und auf unzählige Arten durch dasselbe involutorische Strahlenbüschel und projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden kann. Von den Basen dieser Kegelschnittbüschel kann ein Punkt beliebig gewählt werden; die drei anderen erhält man, wenn man durch ihn und irgend vier Schnittpunkte eines Strahlenpaares von ( $A$ ) mit  $K^4$  einen Kegelschnitt legt und dessen übrige drei Schnittpunkte mit  $K^4$  bestimmt.

Aus 14) ergibt sich, wenn das eine Büschel dritter Ordnung in eine Gerade und ein Büschel zweiter Ordnung zerfällt, der Satz:

17. Zwei projectivische Büschel von Curven zweiter und dritter Ordnung erzeugen eine Curve fünfter Ordnung, welche durch die Grundpunkte beider Büschel geht.

Es folgt:

Zwei projectivische Involutionen vom zweiten und dritten Grade auf demselben Träger haben fünf Doppelpunkte.

18. Die Geraden, welche die Schnittpunkte homologer Elemente eines involutorischen Strahlenbüschels und eines ihm projectivischen Kegelschnittbüschels verbinden, haben als Enveloppe eine Curve  $C_5$  fünfter Classe mit zwei Doppeltangenten und schneiden sich in den Punkten einer Curve  $C^4$  vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Es seien  $aa_1, bb_1, cc_1, \dots$  die Strahlenpaare der Involution ( $S$ ),  $\kappa^2, \kappa_1^2, \kappa_2^2, \dots$  die Kegelschnitte des Büschels ( $A_1A_2A_3A_4$ ). Das Geradenpaar  $aa_1$  wird von allen Kegelschnitten  $\kappa^2 \dots$  in Punktpaaren projectivischer Involutionen geschnitten; die Verbindungslinien homologer Punktpaare haben als Enveloppe eine Curve  $\alpha_3$  dritter Classe, welche die sechs Verbindungslinien der vier Punkte  $A_1A_2A_3A_4$  zu Tangenten hat. Weiter wird der Kegelschnitt  $\kappa^2$  von allen Strahlenpaaren  $aa_1, bb_1, \dots$  in solchen Punkt-



## VI.

# Kinematisch-geometrische Theorie der Bewegung der affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen und starren räumlichen oder ebenen Systeme.

Von

Dr. L. BURMESTER,

Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden.

---

Hierzu Taf. III, Fig. 4 — 10.

---

### Erster Theil.

Ein räumliches oder ebenes System, welches sich derart ändert, dass parallele Gerade parallel bleiben und jede gerade Punktreihe in eine ähnliche Punktreihe übergeht, wird ein affin-veränderliches System genannt; dasselbe ist der specielle Fall eines collinear-veränderlichen räumlichen oder ebenen Systems,\* dessen Phasen beständig resp. die unendlich ferne Ebene oder unendlich ferne Gerade selbstentsprechend gemein haben. In dieser Abhandlung wollen wir die fundamentalen Beziehungen der Bewegung eines affin-veränderlichen räumlichen oder ebenen Systems, welche die Bewegung des ähnlich-veränderlichen oder starren Systems als Specialfall enthält, mit den einfachsten synthetischen Hilfsmitteln ableiten und uns ein übersichtliches geometrisches Bild der Bewegungsformen erwirken, durch welches die Weiterforschung geleitet und gefördert wird. Herr Durrande\*\* hat das affin-veränderliche räumliche System zuerst analytisch behandelt und manche interessante Beziehungen auf diesem Wege abgeleitet und angegeben; aber dieselben verleihen uns keine klare Einsicht in den Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustand des veränderlichen Systems, sondern verschleiern die geometrische Uebersichtlichkeit, weil er die fruchtbare Anwendung der aus den Lehren der projectivischen Geometrie bekannten Beziehungen der

---

\* Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. XX, S. 381.

\*\* *Comptes Rendus* LXXIV, 1234; LXXV, 1177; LXXVIII, 1036. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure* (1873) 2. II, 81.



oder congruenter räumlicher Systeme  $S_1, S_2$  in gleiche Verhältnisse theilen, ein mit diesen Systemen affines räumliches System  $S_x$  bilden.

Da bekanntlich zwei affine räumliche Systeme  $S_1, S_2$  ausser der unendlich fernen Ebene drei selbstentsprechende Ebenen besitzen (von denen zwei imaginär sein können), die sich im Allgemeinen in einem im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkte und in drei selbstentsprechenden Geraden schneiden, so haben die drei affinen räumlichen Systeme  $S_1, S_2, S_x$  diese selbstentsprechenden Elemente gemeinsam. Wir erhalten hiernach den für unsere weiteren Betrachtungen fundamentalen Satz:

1. Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier affiner, ähnlicher oder congruenter räumlicher Systeme  $S_1, S_2$  in gleiche Verhältnisse theilen, bilden ein mit diesen affines räumliches System  $S_x$ , welches die selbstentsprechenden Elemente von  $S_1, S_2$  mit diesen gemeinsam hat.

Bewegt sich das affin-veränderliche System  $S_x$  aus der Systemphase  $S_1$  in die Systemphase  $S_2$ , so durchlaufen alle Systempunkte ähnliche Punktreihen; und nehmen wir an, ein affin-veränderliches räumliches System  $S$  sei durch eine beliebige krummlinige Bewegung in eine Phase  $S_1$  gelangt und alle Systempunkte bewegen sich von diesem Moment an in der Richtung der Tangenten ihrer Bahncurven mit der ihnen zugehörigen Geschwindigkeit, wobei das affin-veränderliche System  $S$  nach einer Zeiteinheit in eine Phase  $S_2$  gelangt, dann repräsentiren die Verbindungsstrecken der homologen Punkte von  $S_1, S_2$  die Grösse und Richtung der Geschwindigkeiten der Systempunkte in der Phase  $S$ . Hieraus folgt der Satz:

2. Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase eines beliebig bewegten affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems bilden ein affines räumliches System.

Hiernach ist der Geschwindigkeitszustand einer Phase  $S_1$  eines affin-veränderlichen räumlichen Systems bestimmt, wenn die Grösse und Richtung  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, D_1 D_2$  der Geschwindigkeiten von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten  $A_1, B_1, C_1, D_1$  der Phase  $S_1$  gegeben sind. Zu jedem fünften Punkte  $E_1$  in  $S_1$  erhalten wir dann die Grösse und Richtung  $E_1 E_2$  der Geschwindigkeit, wenn wir in  $S_2$  den entsprechenden Punkt  $E_2$  construiren, und die Gerade  $E_1 E_2$  ist auch die Tangente an die Bahncurve des Punktes  $E_1$ . Die Phase  $S_2$ , welche uns in Verbindung mit  $S_1$  ein klares, übersichtliches Bild des Geschwindigkeitszustandes im Moment der Phase  $S_1$  liefert, wollen wir die Geschwindigkeitsphase von  $S_1$  nennen. Die selbstentsprechenden Elemente von  $S_1$  und  $S_2$ , welche identisch sind mit den selbstentsprechenden Elementen von  $S_1$  und einer unendlich nahen Phase  $S_3$ , bleiben während der





$$\frac{\beta_1 B_x}{\beta_2 B_x} = \frac{\gamma_1 C_x}{\gamma_2 C_x} = n;$$

demnach ist  $A_x B_x C_x \sim A_1 B_1 C_1$  oder  $A_2 B_2 C_2$  und diese Beziehungen bleiben auch bestehen, wenn die beiden ähnlichen ebenen Systeme in zwei parallelen Ebenen sich befinden. Da zwei in einer Ebene liegende ähnliche Systeme  $S_1, S_2$  im Allgemeinen einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt besitzen, so ergeben sich die speciellen Sätze:

5. Die Punkte, welche die Verbindungsstrecken der homologen Punkte zweier in einer Ebene liegender ähnlicher Systeme  $S_1, S_2$  in gleiche Verhältnisse theilen, bilden ein ähnliches System  $S_x$ , welches den selbstentsprechenden Punkt von  $S_1, S_2$  mit diesen gemeinsam hat.

6. Die Endpunkte der Geschwindigkeiten der Systempunkte einer Phase  $S_1$  eines in einer festen Ebene beliebig bewegten, ähnlich-veränderlichen ebenen Systems bilden ein mit  $S_1$  ähnliches ebenes System  $S_v$ .

Es seien in Fig. 7  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$  resp. homologe Punkte in drei beliebig liegenden räumlichen oder ebenen Systemen  $S_1, S_2, S_3$ , deren Verwandtschaft erst im Nachfolgenden festgestellt werden soll. Construiren wir die beiden Parallelogramme  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und  $B_1 B_2 B_3 B_4$ , welche (vorausgesetzt, dass die Ecken  $A_2, A_4$  und  $B_2, B_4$  gegenüber liegen) resp. durch die drei homologen Punkte  $A_1 A_2 A_3$  und  $B_1 B_2 B_3$  bestimmt sind,\* dann steht die erhaltene neue Strecke  $A_4 B_4$  der beiden vierten Eckpunkte der Parallelogramme in einer folgenreichen Beziehung zu den Strecken  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$ . Ziehen wir in unserer Figur  $\alpha_2 A_4 \nparallel A_2 B_2$ , ferner  $B_1 \beta_3 \nparallel A_3 B_3$ , so ist wegen der congruenten Dreiecke  $A_4 \alpha_2 A_1, A_2 B_2 A_3$  und  $B_1 \beta_3 B_4, B_3 A_3 B_2$  auch  $\alpha_2 A_1 \nparallel A_3 B_2 \nparallel B_4 \beta_3$  und demnach  $\alpha_2 B_4 \nparallel A_1 \beta_3$ , d. h. die geometrische Summe von  $A_1 B_1$  und  $A_3 B_3$  ist gleich der geometrischen Summe von  $A_2 B_2$  und  $A_4 B_4$ . Legen wir also in Fig. 7a die Strecken 1, 2, 3, 4, welche resp. gleich und parallel den Strecken  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3, A_4 B_4$  sind, an einander, so bilden die vier Strecken 1, 2, 3, 4 ein geschlossenes räumliches oder ebenes Viereck, je nachdem jene drei homologen Strecken  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  beliebig im Raume oder in parallelen Ebenen liegen, die auch in eine Ebene zusammenfallen können. Und umgekehrt ergibt sich, wenn ein solches geschlossenes räumliches oder ebenes Viereck gegeben ist und wir ziehen die drei Strecken  $A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$  in beliebiger Lage resp. gleich und pa-

\* Da drei Punkte  $A_1 A_2 A_3$  drei verschiedene Parallelogramme bestimmen, so wollen wir, um diese Dreidentigkeit zu vermeiden, in der Folge unter dem durch  $A_1 A_2 A_3$  bestimmten Parallelogramm stets dasjenige verstehen, dessen Ecken in der Reihenfolge  $A_1 A_2 A_3 A_4$  liegen, bei dem also  $A_1, A_2$  und  $A_3, A_4$  gegenüberliegende Ecken sind.



Strecken, die mit jenen nicht parallel sind, eintritt, dann schrumpft das vierte System  $S_4$  in einen Punkt zusammen.

Nehmen wir an, es seien  $S_1 S_2 S_3$  drei in einer Ebene liegende ähnliche ebene Systeme und ausser den homologen Strecken  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$ ,  $A_3 B_3$  seien noch die homologen Strecken  $A'_1 B'_1$ ,  $A'_2 B'_2$ ,  $A'_3 B'_3$ , welche also mit jenen resp. denselben Winkel bilden, gegeben und bestimmen wir zu diesen beziehentlich in dem vierten System  $S_4$  die Strecken  $A_4 B_4$ ,  $A'_4 B'_4$ , so sind auch die Vierecke  $1234$ ,  $1'2'3'4'$ , welche diesen Strecken beziehentlich angehören, ähnlich, und folglich bilden auch die beiden Strecken  $A_4 B_4$ ,  $A'_4 B'_4$  denselben Winkel, wie jene homologen Streckenpaare. Hiernach erhalten wir den speciellen Satz:

9. Die vierten Eckpunkte der Parallelogramme, welche in gleichem Sinne durch je drei homologe Punkte von drei in einer Ebene ähnlichen ebenen Systemen  $S_1 S_2 S_3$  bestimmt sind, bilden ein viertes ähnliches ebenes System  $S_4$ .

Fallen zwei Seiten des Vierecks  $1234$ , z. B.  $2, 4$ , in eine Gerade, so sind die homologen Geraden der ähnlichen Systeme  $S_2, S_4$  parallel und diese Systeme haben ähnliche Lage. Ist in den ähnlichen ebenen Systemen  $S_1 S_3 S_2$  die geometrische Summe von zwei homologen Strecken  $A_1 B_1$ ,  $A_3 B_3$  gleich der entsprechenden Strecke  $A_2 B_2$ , dann schrumpft das vierte System  $S_4$  in einen Punkt zusammen.

In Fig. 8 sind durch vier entsprechende Punkte drei homologe Parallelepipede  $A_1 B_1 C_1 D_1$ ,  $A_2 B_2 C_2 D_2$ ,  $A_3 B_3 C_3 D_3$  in den affinen räumlichen Systemen bestimmt; construiren wir in  $S_4$  die entsprechenden vierten Eckpunkte  $A_4 B_4 C_4 D_4$  der Parallelogramme  $A_1 A_2 A_3 A_4$ ,  $B_1 B_2 B_3 B_4$ ,  $C_1 C_2 C_3 C_4$ ,  $D_1 D_2 D_3 D_4$ , so ist auch durch die vier Punkte  $A_4 B_4 C_4 D_4$  in dem vierten System  $S_4$  das homologe Parallelepiped gegeben und die übrigen entsprechenden Eckpunkte der vier homologen Parallelepipede befinden sich in den Ecken von Parallelogrammen.\*

Aus unseren Darlegungen ergeben sich weiter die folgenden Sätze:

10. Wird ein affin-veränderliches räumliches System  $S_2$  durch eine Ursache in einer bestimmten Zeit geradlinig in eine Phase  $S_1$  und durch eine andere Ursache in derselben Zeit geradlinig in eine Phase  $S_3$  bewegt, so durchlaufen, wenn beide Ursachen gleichzeitig wirken, die Punkte des Systems  $S_2$  in derselben Zeit die Diagonalen der Parallelogramme, welche durch je drei homologe

---

\* Diese für unsere weiteren Betrachtungen fundamentalen Sätze 1 bis 10 können auch leicht durch die eminent fruchtbare, leider zu wenig bekannte Methode abgeleitet werden, welche H. Grassmann in seiner „Ausdehnungslehre“ (Leipzig 1844, zweite Ausgabe 1878 und Berlin 1862) dargelegt hat.



$A_2 A_\varphi, B_2 B_\varphi, C_2 C_\varphi, D_2 D_\varphi, \dots$ , welche beziehentlich den unendlich kleinen Strecken  $A_2 A_4, B_2 B_4, C_2 C_4, D_2 D_4, \dots$  proportional sind, aufgetragen, so bilden die Endpunkte  $A_\varphi B_\varphi C_\varphi D_\varphi \dots$  der Beschleunigungen ein mit  $A_2 B_2 C_2 D_2 \dots$  affines räumliches System  $S_\varphi$ . Wir erhalten hiernach den wichtigen folgenreichen Satz:

12. Die Endpunkte der Beschleunigungen der Systempunkte einer Phase eines beliebig bewegten affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems bilden ein affines räumliches System.

Nennen wir das System  $S_\varphi$  der Endpunkte der Beschleunigungen die Beschleunigungsphase, so entspricht jeder Phase des veränderlichen räumlichen Systems eine affine Beschleunigungsphase und die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der Systemphase und der zugehörigen Beschleunigungsphase repräsentiren die Grösse und Richtung der Beschleunigungen der Systempunkte. Diese wichtige, interessante Beziehung liefert ein klares, übersichtliches Bild des Beschleunigungszustandes eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems und wird die Grundlage für unsere weiteren Untersuchungen bilden.

Eine Systemphase  $S_x$  und die zugehörige Beschleunigungsphase  $S_\varphi$  besitzen als affine räumliche Systeme im Allgemeinen drei im Endlichen liegende selbstentsprechende Ebenen, die sich in drei selbstentsprechenden Geraden und in einem selbstentsprechenden Punkte schneiden. Diesen selbstentsprechenden Punkt, den einzigen, dessen Beschleunigung gleich Null ist, wollen wir den Beschleunigungspol nennen. Für alle in den drei selbstentsprechenden Ebenen liegenden Systempunkte der betreffenden Phase liegen die Beschleunigungsrichtungen beziehentlich in diesen Ebenen und für alle in den drei selbstentsprechenden Geraden liegenden Systempunkte fallen die Beschleunigungsrichtungen resp. in diese Geraden. Da die affinen räumlichen Systeme  $S_x, S_\varphi$  durch vier nicht in einer Ebene liegende homologe Punkte bestimmt sind, so erhalten wir den Satz:

13. Sind durch  $A_x A_\varphi, B_x B_\varphi, C_x C_\varphi, D_x D_\varphi$  die Grössen und Richtungen der Beschleunigungen von vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten  $A_x B_x C_x D_x$  einer Phase  $S_x$  eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems gegeben, so ist der Beschleunigungszustand der Phase bestimmt, und wenn man zu einem beliebigen fünften Punkte  $E_x$  der Phase  $S_x$  den entsprechenden Punkt  $E_\varphi$  in der affinen Beschleunigungsphase  $S_\varphi$  construirt, so repräsentirt  $E_x E_\varphi$  die Grösse und Richtung der Beschleunigung des Punktes  $E_x$ .



Gerade  $DE$  mit der Ebene  $ABC$  bildet, in diese Ebene eine beliebige Gerade, welche die Geraden  $AB$ ,  $AC$  resp. in den Punkten  $\beta$ ,  $\gamma$  trifft, dann beschreiben nach dem Satze 1 auch  $\beta$ ,  $\gamma$  auf affinen Curven affine Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte  $G$  und folglich auch von dem auf  $GD$  liegenden Punkte  $E$ . Hiernach erhalten wir den Satz:

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten.

Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen dieser Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Systemcurve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt dann die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve  $L$  eines affin-veränderlichen räumlichen Systems  $S$ , dessen Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als die Phasen einer Systemcurve  $A$  eines andern affin-veränderlichen räumlichen Systems  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve  $L$  affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in  $\Sigma$  liegenden Systemcurve  $A$  erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in  $S$  liegenden Systemcurve  $L$  gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehentlich affine Curven sind, so ergibt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann in eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig begrenzten, ins Unendliche gehenden Geraden degeneriren.





Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen ebenen Systems umhüllen dieselbe Curve, welche von den Phasen dieser Systemcurve umhüllt wird und welche wir die Hüllbahn-curve nennen. Aus 20) ergibt sich dann die Umkehrbarkeit der Bewegung:

21. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve  $C$  eines affin-veränderlichen ebenen Systems  $S$ , dessen Punkte auf affinen ebenen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als Phasen einer Systemcurve  $\Gamma$  eines andern affin-veränderlichen ebenen Systems  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrt gedachten Phasen der Curve  $C$  affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in  $\Sigma$  liegenden Systemcurve  $\Gamma$  umhüllen dieselbe Hüllbahn-curve, wie die Phasen der in  $S$  liegenden Systemcurve  $C$ .

Ferner ergeben sich die folgenden speciellen Sätze:

22. Beschreiben drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems affine Punktreihen auf drei Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein ebenes affines System.
23. Bewegen sich drei nicht in einer Geraden liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen, so bewegen sich alle Systempunkte harmonisch gleichperiodisch auf Ellipsen und die Mittelpunkte derselben bilden ein affines ebenes System.

Diese Ellipsen können zum Theil in gerade Strecken übergehen und dann bilden die Endpunkte dieser Strecken die Geschwindigkeitspolbahn des veränderlichen ebenen Systems.

Bewegen sich zwei Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf zwei in einer Ebene liegenden Kreisen, dann bewegen sich alle Punkte ihrer Verbindungsgeraden mit gleicher Winkelgeschwindigkeit in gleichem Sinne auf Kreisen. Haben drei nicht in einer Geraden liegende Punkte eines affin-veränderlichen ebenen Systems solche Bewegungen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten und die Mittelpunkte der Bahnkreise bilden ein affines ebenes System; bewegt sich aber der dritte Systempunkt im entgegengesetzten Sinne mit derselben Winkelgeschwindigkeit, welche die beiden ersten Punkte besitzen, auf einem Kreise, dann beschreiben ausser diesen drei Punkten nur noch die auf der Verbindung der erstgenannten



seiner elliptischen Bahn, dann gilt dasselbe von allen Systempunkten; die Beschleunigungsphase  $S_\varphi$  ist dann starr und identisch mit dem System der Mittelpunkte der elliptischen Bahnen.

Sind in Fig. 10 zwei in einer Ebene liegende affine ebene Systeme  $S_1, S_2$  gegeben, so können wir leicht den geometrischen Ort derjenigen homologen Punkte dieser Systeme bestimmen, deren Verbindungsstrecken gleich einer gegebenen constanten Strecke  $m$  sind. Nehmen wir an, es seien  $A_1 B_1 \dots$  und  $A_2 B_2 \dots$  homologe Punktreihen auf den entsprechenden Geraden  $l_1, l_2$  und  $P$  sei der selbstentsprechende Punkt von  $S_1, S_2$ ; dann ziehen wir die entsprechenden Strahlen  $PA_1, PA_2$ , beschreiben um  $P$  mit  $m$  als Radius einen Kreis  $k$ , ziehen den Kreisdurchmesser  $P\alpha \parallel A_1 A_2$ ,  $\alpha A'_1 \parallel PA_2$  und  $A'_1 A'_2 \parallel A_1 A_2$ , so ist  $A'_1 A'_2 = m$  und  $A'_1, A'_2$  sind homologe Punkte in  $S_1, S_2$ , deren Verbindungsstrecke gleich der constanten Länge  $m$  ist. In gleicher Weise erhalten wir die homologen Punkte  $B'_1, B'_2$ , indem wir den Kreisdurchmesser  $P\beta \parallel B_1 B_2$ ,  $\beta B'_1 \parallel PB_2$  und  $B'_1 B'_2 \parallel B_1 B_2$  ziehen. Dann bilden die Punkte  $A'_1 B'_1 \dots$  und  $A'_2 B'_2 \dots$  resp. den genannten geometrischen Ort in  $S_1$  und  $S_2$ . Betrachten wir  $S_1$  als Phase eines affin-veränderlichen ebenen Systems und  $S_2$  als zugehörige Geschwindigkeitsphase oder Beschleunigungsphase, so bilden  $A'_1 B'_1 \dots$  beziehentlich den geometrischen Ort der Systempunkte, welche gleiche Geschwindigkeit oder gleiche Beschleunigung besitzen. Wir wollen nun beweisen, dass dieser geometrische Ort eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt mit  $P$  zusammenfällt. Die Verbindungsgeraden der homologen Punkte  $A_1 A_2, B_1 B_2, \dots$  umhüllen eine Parabel  $\pi$ , weil die Punktreihen  $A_1 B_1 \dots$  und  $A_2 B_2 \dots$  ähnlich sind. Die beiden durch  $P$  gehenden Geraden  $h, i$ , welche die homologen Punkte  $H_1 H_2, J_1 J_2$  verbinden, sind die selbstentsprechenden Geraden in den affinen ebenen Systemen  $S_1, S_2$ ; diese selbstentsprechenden Geraden, welche in unserer Figur reell sind und auch imaginär sein können, sind Tangenten der Parabel  $\pi$  und daher reell oder imaginär, je nachdem  $P$  ausserhalb oder innerhalb der Parabel  $\pi$  liegt. Betrachten wir nun  $P\alpha A'_1 A'_2$  und  $P\beta B'_1 B'_2$  beziehentlich als entsprechende Punkte in affinen ebenen Systemen  $\Sigma_\alpha$  und  $\Sigma_\beta$ , so sind auch in diesen Systemen die Geraden  $h, i$  selbstentsprechende Gerade; denn als reelle oder imaginäre Tangenten der Parabel  $\pi$  theilen sie die Verbindungsstrecken  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  in gleiche Verhältnisse und folglich auch die parallelen Strecken  $A'_1 A'_2$  und  $B'_1 B'_2$ . Betrachten wir  $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta \dots$  als Phasen eines affin-veränderlichen ebenen Systems  $\Sigma$ , so sind in diesen die Geraden  $h, i$  und der Punkt  $P$  als selbstentsprechende Elemente fest und ein Punkt des Systems durchläuft den Kreis  $k$ . Nach einem früher bewiesenen allgemeinen Satze\* folgt dann, dass alle Systempunkte

\* Burmester, Kinematisch-geometrische Untersuchungen etc., Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 20, S. 384.





Gerade  $DE$  mit der Ebene  $ABC$  bildet, in diese Ebene eine beliebige Gerade, welche die Geraden  $AB$ ,  $AC$  resp. in den Punkten  $\beta$ ,  $\gamma$  trifft dann beschreiben nach dem Satze 1 auch  $\beta$ ,  $\gamma$  auf affinen Curven affine Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte  $G$  und folglich auch von dem auf  $GD$  liegenden Punkte  $E$ . Hiernach erhalten wir den Satz

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten. Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen der Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Systemcurve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt da die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve  $L$  eines affin-veränderlichen räumlichen Systems  $S$ , dessen Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen Systems  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Punkte auf den erstgedachten Phasen der Curve  $L$  affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in  $\Sigma$  liegenden Systemcurve  $A$  erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in  $S$  liegenden Systemcurve  $L$  gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehentlich affine Curven sind, so ergibt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig begrenzten, ins Unendliche gehenden Geraden degeneriren.









Gerade  $DE$  mit der Ebene  $ABC$  bildet, in diese Ebene eine beliebige Gerade, welche die Geraden  $AB$ ,  $AC$  resp. in den Punkten  $\beta$ ,  $\gamma$  trifft; dann beschreiben nach dem Satze 1 auch  $\beta$ ,  $\gamma$  auf affinen Curven affine Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte  $G$  und folglich auch von dem auf  $GD$  liegenden Punkte  $E$ . Hiernach erhalten wir den Satz:

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten. Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen der Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Systemcurve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt daher die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve  $L$  eines affin-veränderlichen räumlichen Systems  $S$ , dessen Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen Systems  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrgedachten Phasen der Curve  $L$  affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in  $\Sigma$  liegenden Systemcurve  $A$  erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in  $S$  liegenden Systemcurve  $L$  gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehentlich affine Curven sind, so ergibt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann in eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig begrenzten, ins Unendliche gehenden Geraden degeneriren.







Gerade  $DE$  mit der Ebene  $ABC$  bildet, in diese Ebene eine beliebig Gerade, welche die Geraden  $AB$ ,  $AC$  resp. in den Punkten  $\beta$ ,  $\gamma$  trifft dann beschreiben nach dem Satze 1 auch  $\beta$ ,  $\gamma$  auf affinen Curven affine Punktreihen; dasselbe gilt dann von dem Punkte  $G$  und folglich auch von dem auf  $GD$  liegenden Punkte  $E$ . Hiernach erhalten wir den Satz:

16. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf vier ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe von allen Systempunkten. Beschreiben nur drei Punkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems auf drei ebenen oder räumlichen affinen Curven affine Punktreihen, so gilt dasselbe nur von den Systempunkten, die in der durch jene drei Punkte bestimmten Ebene liegen.

Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve eines bewegten affin-veränderlichen räumlichen Systems erfüllen die durch die Phasen dieser Systemcurve gebildete Fläche, welche wir die Bahnfläche dieser Systemcurve nennen wollen. Aus dem eben abgeleiteten Satze 16 folgt dann die Umkehrbarkeit der betreffenden Bewegung.

17. Die Bahncurven der Punkte einer Systemcurve  $L$  eines affin-veränderlichen räumlichen Systems  $S$ , dessen Punkte auf affinen Bahncurven affine Punktreihen beschreiben, können als die Phasen einer Systemcurve eines andern affin-veränderlichen räumlichen Systems  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Punkte auf den erstarrgedachten Phasen der Curve  $L$  affine Punktreihen durchschreiten; und die Phasen der in  $\Sigma$  liegenden Systemcurve  $A$  erzeugen dieselbe Bahnfläche, welche durch die Phasen der in  $S$  liegenden Systemcurve  $L$  gebildet wird.

Da alle Hyperbeln, alle Ellipsen, alle Parabeln beziehentlich affine Curven sind, so ergibt sich aus 16 der specielle Satz:

18. Beschreiben vier nicht in einer Ebene liegende Systempunkte eines affin-veränderlichen räumlichen Systems affine Punktreihen auf vier Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln, so beschreiben alle Systempunkte affine Punktreihen resp. auf Hyperbeln, Ellipsen oder Parabeln und die Mittelpunkte der Hyperbeln, wie die der Ellipsen bilden ein affines räumliches System.

Diese Kegelschnitte können auch zum Theil in eine Gerade übergehen. Die Hyperbel kann in eine ins Unendliche gehende, durch zwei Punkte im Endlichen begrenzte Gerade ausarten; eine Ellipse kann eine gerade Strecke übergehen und eine Parabel kann zu einer einseitig begrenzten, ins Unendliche gehenden Geraden degeneriren.













des affin-veränderlichen Systems von der Phase  $S_x$  nach der zugehörigen Beschleunigungsphase  $S_\phi$  in der Zeiteinheit. Denken wir uns zu einer Phase  $S_x$  des veränderlichen Systems die zugehörige affine Geschwindigkeitsphase  $S_v$  bestimmt, so geben uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme  $S_x, S_v$  die Grösse und Richtung der Geschwindigkeit der betreffenden Punkte und die Tangenten an den Bahncurven dieser Punkte; denken wir uns ferner zu der Phase  $S_x$  die zugehörige affine Beschleunigungsphase  $S_\phi$  construirt, so liefern uns die Verbindungsstrecken der homologen Punkte der affinen räumlichen Systeme  $S_x, S_\phi$  die Grösse und Richtung der Beschleunigung der betreffenden Punkte der Systemphase  $S_x$ . Hiernach ist das Studium des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems auf die Untersuchung der rein-geometrischen Beziehungen der drei affinen räumlichen Systeme  $S_x, S_v, S_\phi$  zurückgeführt und die durch die Geometrie der Lage gebotenen zahlreichen interessanten Beziehungen können als Sätze über Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Bahncurven der Punkte eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems interpretirt werden. Wir wollen einige der wichtigsten Resultate, die unmittelbar aus dieser Darlegung hervorgehen, ableiten.

Die Verbindungsstrahlen der homologen Punkte zweier affiner räumlicher Systeme bilden einen besondern Strahlencomplex zweiter Ordnung und zweiter Classe, und die drei im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Ebenen dieser Systeme, welche auch Hauptebenen des Complexes genannt werden, bestimmen auf jedem dieser Strahlen Strecken, die im constanten Verhältnisse stehen. Dieser besondere Strahlencomplex, den wir einen triedralen Strahlencomplex nennen wollen, wird auch durch die Schnittgeraden je zweier entsprechender Ebenen der affinen Systeme gebildet. Der triedrale Strahlencomplex ist, weil zwei affine räumliche Systeme stets die unendlich ferne Ebene selbstentsprechend gemein haben, ein tetraedraler Strahlencomplex mit einer unendlich fernen Hauptebene und wird noch mehr specialisirt, wenn die affinen räumlichen Systeme in ähnliche oder congruente übergehen; aber wir wollen jene Benennung auch für diese beiden letzten besonderen Fälle beibehalten. Ferner wollen wir auch, um Ausnahmen zu vermeiden und der Consequenz wegen von starren räumlichen Systemen sagen, dass sie einen Geschwindigkeitspol besitzen, obwohl derselbe stets im Unendlichen liegt. Wir erhalten hiernach die sich von selbst ergebenden Sätze:

29. Die  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{Beschleunigungs-} \end{array} \right\}$  Richtungen der Punkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems bilden einen triedralen Strahlencomplex, dessen Hauptebenen und Haupt-



$\left. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{Beschleunigungs-} \end{array} \right\}$  Pol gehendes Hyperboloid und die Gesamtheit dieser Richtungen umhüllt eine Complexfläche.

Zwei entsprechende Parallelebenenbüschel in zwei affinen Systemen haben die unendlich ferne Ebene selbstentsprechend gemeinsam und erzeugen demnach eine Ebene, die durch den im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt der affinen Systeme geht. Bestimmen wir also drei solche Ebenen durch drei Paar entsprechende Parallelebenenbüschel in den Systemen  $S_x, S_y$ , so ist der Schnittpunkt dieser drei Ebenen der Geschwindigkeitspol. Die Geschwindigkeitsrichtungen aller Punkte einer solchen durch den Geschwindigkeitspol gehenden Ebene liegen demnach in den Ebenen des zugehörigen, in  $S_y$  befindlichen Parallelebenenbüschels oder, mit anderen Worten, sind senkrecht zu einer auf diesen Parallelebenen normalen Geraden. Das Analoge gilt für die Beschleunigung und wir erhalten den von Herrn Durrande \* analytisch abgeleiteten Satz:

35. Alle Punkte in einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems, deren  $\left. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{Beschleunigungs-} \end{array} \right\}$  Richtungen senkrecht zu einer Geraden sind, liegen in einer durch den  $\left. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{Beschleunigungs-} \end{array} \right\}$  Pol gehenden Ebene.

Betrachten wir zwei entsprechende ebene affine Systeme  $e_x, e_y$  in den affinen räumlichen Systemen  $S_x, S_y$ , dann entspricht der Schnittgeraden  $e_x e_y$  in  $S_y$  eine in der Ebene  $e_x$  liegende Gerade in  $S_x$ . Denken wir uns von dem affinen ebenen System  $e_y$  eine senkrechte Projection  $e'_y$  auf Ebene  $e_x$  bestimmt, dann haben die affinen ebenen Systeme  $e_x, e'_y$  einen im Endlichen liegenden selbstentsprechenden Punkt und zwei durch diesen gehende selbstentsprechende Gerade, die auch imaginär sein können. Dasselbe gilt von je zwei in  $S_x, S_y$  liegenden ebenen Systemen und wir gelangen demnach zu dem Satze:

36. In jeder Ebene  $e_x$  einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren Systems giebt es einen Punkt, dessen  $\left. \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeits-} \\ \text{Beschleunigungs-} \end{array} \right\}$  Richtung senkrecht zu dieser Ebene  $e_x$  ist, und zwei durch diesen Punkt gehende reelle oder imaginäre Gerade, die solche

\* a. a. O., und *Comptes rendus* LXXIV, 1234.





gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

39. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems, welche gleiche Beschleunigung besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.\*

Da ähnliche räumliche Systeme eine reelle selbstentsprechende Ebene und eine auf dieser senkrecht stehende selbstentsprechende Gerade besitzen, und congruente räumliche Systeme nur eine selbstentsprechende Gerade haben, welche zwei congruente Punktreihen trägt, so folgt aus dem Satze 38 der specielle:

40. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol, dessen Axe die selbstentsprechende Gerade ist, welche die Systemphase mit ihrer unendlich nahen Phase gemeinsam hat und welches bei einem starren räumlichen System in einen Rotationscylinder übergeht.

Wir wollen das Ellipsoid, dessen Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, das Geschwindigkeitsellipsoid und das Ellipsoid, welches die Punkte gleicher Beschleunigung trägt, das Beschleunigungsellipsoid nennen; jenes geht für die Geschwindigkeit Null in den Geschwindigkeitspol über und dieses zieht sich für die Beschleunigung Null in den Beschleunigungspol zusammen.

Sind drei Ebenen  $E_h E_i E_k$  gegeben, welche sich in einem Punkte schneiden, und denken wir uns die Geraden  $g_a g_b g_c \dots$  im Raume liegend welche diese Ebenen resp. in den Punkten  $A_h A_i A_k, B_h B_i B_k, C_h C_i C_k$  derart treffen, dass

$$\frac{A_h A_i}{A_i A_k} = \frac{B_h B_i}{B_i B_k} = \frac{C_h C_i}{C_i C_k} = \dots = \text{const.}$$

ist, nehmen wir ferner auf diesen Geraden die ähnlichen Punktreihen  $A_1 A_2 A_h A_i A_k, B_1 B_2 B_h B_i B_k, C_1 C_2 C_h C_i C_k, \dots$  an, so können wir die Geraden  $g_a g_b g_c \dots$  als die Verbindungsgeraden der homologen Punkte  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, \dots$  zweier räumlicher affiner Systeme  $S_1, S_2$  ansehen für welche  $P$  der selbstentsprechende Punkt und  $E_h E_i E_k$  die drei selbstentsprechenden Ebenen sind. Ist insbesondere

\* Dieser Satz wurde für das starre System laut einer brieflichen Mittheilung zuerst von Herrn Schell in seinem Vortrage zu Karlsruhe im Jahre 1871 analytisch abgeleitet, ferner von Herrn Jordan und dann auch von Herrn Liguine (*Bulletin de la Société mathématique de France* 1873, T. I pag. 146 et 152) mitgetheilt.







# Kleinere Mittheilungen.

## III. Ueber einige unendliche Reihen.

Wenn die Werthe zweier Integrale von den Formen

$$1) \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos nt \, dt, \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin nt \, dt$$

bekannt sind, so lassen sich die verallgemeinerten Fourier'schen Sätze

$$2) \quad \frac{1}{2} A_0 + \sum A_n \cos nx = f(x) + \sum f(2n\pi - x) + \sum f(2n\pi + x),$$

$$3) \quad \sum B_n \sin nx = f(x) - \sum f(2n\pi - x) + \sum f(2n\pi + x),$$

$$0 < x < 2\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

als Transformationen auffassen, durch welche zwei periodische Reihen andere, meistens nicht periodische Reihen umgesetzt werden. Für Gleichung 2) bietet die Annahme  $f(t) = e^{-at}$  ein bekanntes Beispiel; die Gleichung 3) mag hier ein neues folgen, welches zu mehreren merkwürdigen Resultaten führt.

Aus der schon mehrfach bewiesenen Integralformel\*\*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \vartheta}{e^{2\pi\vartheta} - 1} \, d\vartheta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

erhält man zunächst

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^{2\pi\vartheta} - 1} - \frac{1}{2\pi\vartheta} \right) \sin \lambda \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^\lambda - 1} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

und allgemeiner für  $\lambda = 2n\pi\varrho$ ,  $\vartheta = \frac{t}{2\pi\varrho}$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^{\frac{t}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{t} \right) \sin nt \, dt = 2\varrho \left( \frac{1}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2n\pi\varrho} \right);$$

man hat also

\* Man sehe des Verf. Compendium der höheren Analysis, Bd. II S. 151.

\*\* Ebendas. Bd. I, § 93, Formel 7.

$$f(t) = \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{t}, \quad B_n = 2\varrho \left( \frac{1}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2n\pi\varrho} \right).$$

Die Formel 3) giebt nun, wenn die Summirungen

$$\sum \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad \frac{1}{x} - \sum \frac{1}{2n\pi - x} + \sum \frac{1}{2n\pi + x} = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2}$$

benutzt werden,

$$\begin{aligned} 4) \quad & 2\varrho \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} - \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} + \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1} - \frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Die beiden rechter Hand vorkommenden Reihen lassen sich dadurch transformiren, dass man die Entwicklung

$$\frac{\xi}{1 - \xi} = \xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots, \quad \xi^2 < 1$$

sowohl für  $\xi = e^{-\frac{2n\pi - x}{\varrho}}$ , als für  $\xi = e^{-\frac{2n\pi + x}{\varrho}}$  in Anwendung bringt; es wird dann

$$\sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi - x}{\varrho}} - 1} - \sum \frac{1}{e^{\frac{2n\pi + x}{\varrho}} - 1} = \sum \frac{e^{\frac{nx}{\varrho}} - e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}.$$

Beachtet man noch die identische Gleichung

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\varrho}} - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2\varrho}} + e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}} - e^{-\frac{x}{2\varrho}}} - \frac{1}{2},$$

so hat man

$$5) \quad \frac{x}{2\pi} + 2\varrho \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} = -\frac{\varrho}{2} \cot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2\varrho}} + e^{-\frac{x}{2\varrho}}}{e^{\frac{x}{2\varrho}} - e^{-\frac{x}{2\varrho}}} - \sum \frac{e^{\frac{nx}{\varrho}} - e^{-\frac{nx}{\varrho}}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}$$

oder auch, wenn man von den Bezeichnungen

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = \text{ch } pu, \quad \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \text{sh } pu$$

Gebrauch macht, mit  $\sqrt{\varrho}$  dividirt und etwas anders ordnet,

$$\begin{aligned} 6) \quad & \frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}}{2} \cot \frac{x}{2} + 2\sqrt{\varrho} \sum \frac{\sin nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} \\ &= -\frac{x}{4\pi\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{\varrho}} \text{cthp } \frac{x}{2\varrho} - \frac{2}{\sqrt{\varrho}} \sum \frac{\text{sh } p \frac{nx}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit  $\Phi(x, \varrho)$ , so liegt in der vorstehenden Gleichung der Satz

$$\Phi(iz, \varrho) = -i\Phi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Durch Differentiationen oder Integrationen in Beziehung auf  $x$  oder  $\varrho$  lassen sich aus Nr. 6) weitere Resultate ähnlicher Art ableiten, von denen einige Platz finden mögen. Wird die Gleichung 6) nach  $x$  differenzirt und dann mit  $\pi\sqrt{\varrho}$  multiplicirt, so entsteht

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} - \frac{\pi\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} + 2\pi\varrho \sum \frac{n\cos nx}{e^{2n\pi\varrho} - 1} \\ 7) & = -\frac{1}{4} - \frac{\pi}{4\varrho\sinh p^2\frac{x}{2\varrho}} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{n\csh p\frac{x}{\varrho}}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1}, \end{aligned}$$

d. i. wenn die linke Seite mit  $\Psi(x, \varrho)$  bezeichnet wird,

$$\Psi(iz, \varrho) = -\Psi\left(\frac{z}{\varrho}, \frac{1}{\varrho}\right).$$

Nicht ohne Interesse ist der Fall  $x=0$ , für welchen periodische, nach Cosinus fortschreitende Reihen gültig bleiben. Die Differenz

$$\frac{\varrho}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4p\sinh p^2\frac{x}{2\varrho}}$$

geht dann in  $\frac{1}{12}\left(\varrho + \frac{1}{\varrho}\right)$  über und es wird aus Nr. 7)

$$8) \quad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho \sum \frac{n}{e^{2n\pi\varrho} - 1} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum \frac{n}{e^{\frac{2n\pi}{\varrho}} - 1},$$

wonach der Function

$$\Psi(\varrho) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + \sum \frac{2n\pi\varrho}{e^{2n\pi\varrho} - 1}$$

die Eigenschaft

$$\Psi(\varrho) + \Psi\left(\frac{1}{\varrho}\right) = 0$$

zukommt.

Bezeichnet man ferner mit  $s_n$  die Summe der Divisoren von  $n$ , so kann man der Gleichung 8) auch folgende Form ertheilen:

$$9) \quad \frac{1}{4} - \frac{\pi}{12}\varrho + 2\pi\varrho \sum s_n e^{-2n\pi\varrho} = -\frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}\frac{1}{\varrho} - \frac{2\pi}{\varrho} \sum s_n e^{-\frac{2n\pi}{\varrho}}$$

und daraus ergibt sich z. B. für  $\varrho=1$

$$\sum \frac{n}{e^{2n\pi} - 1} = \sum s_n e^{-2n\pi} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{\pi} \right) = 0,00187793.$$

Bei kleinen  $\varrho$  convergiren die in Nr. 8) und 9) linker Hand vorkommenden Reihen sehr langsam, die rechts verzeichneten Reihen





und  $\varphi(1-\mu)$  eine ähnliche Relation bestehen würde. Auf dem früheren Wege liess sich letztere nicht entdecken, dagegen ergibt sie sich sehr leicht, wenn man das Integral

$$3) \quad U = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} \right\} x^{\mu-1} dx, \quad \mu > 0,$$

auf zwei verschiedene Weisen entwickelt.

Ersetzt man zunächst  $x$  durch  $2x$ , so hat man

$$2^{1-\mu} U = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} dx,$$

mithin durch Subtraction

$$(2^{1-\mu} - 1) U = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} \right\} x^{\mu-1} dx.$$

Es ist nun weiter

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^x - e^{-x}} - \frac{2}{e^{2x} - e^{-2x}} &= \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} - \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\ &= e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - \dots - (e^{-2x} - e^{-4x} + e^{-6x} - \dots), \end{aligned}$$

mithin durch Substitution in die vorige Gleichung und nach Ausführung der Integrationen

$$(2^{1-\mu} - 1) U = \Gamma(\mu) \left( \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \dots \right) - \Gamma(\mu) \left( \frac{1}{2^\mu} - \frac{1}{4^\mu} + \frac{1}{6^\mu} - \dots \right)$$

oder zufolge der Bedeutung von  $\varphi(\mu)$

$$4) \quad U = \frac{1}{2^{1-\mu} - 1} \left( 1 - \frac{1}{2^\mu} \right) \Gamma(\mu) \varphi(\mu).$$

Eine andere, nicht für alle positiven  $\mu$  geltende Entwicklung von  $U$  entsteht dadurch, dass man in Nr. 3) von der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} = \frac{x}{\pi^2 + x^2} - \frac{x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{x}{(3\pi)^2 + x^2} - \dots$$

Gebrauch macht und die einzelnen Integralwerthe nach der Formel

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\mu dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \mu \pi} \cdot \frac{1}{a^{1-\mu}}, \quad -1 < \mu < +1$$

bestimmt; dies giebt

$$U = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \mu \pi} \left\{ \frac{1}{\pi^{1-\mu}} - \frac{1}{(2\pi)^{1-\mu}} + \frac{1}{(3\pi)^{1-\mu}} - \dots \right\} = \frac{\pi^\mu}{2 \cos \frac{1}{2} \mu \pi} \varphi(1-\mu).$$

Die Vergleichung dieses und des unter Nr. 4) verzeichneten Werthes von  $U$  führt nun zu der Relation

$$5) \quad \frac{\varphi(1-\mu)}{\varphi(\mu)} = \frac{2^\mu - 1}{2^{1-\mu} - 1} \cdot \frac{2 \Gamma(\mu) \cos \frac{1}{2} \mu \pi}{(2\pi)^\mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

Symmetrischer gestaltet sich dieselbe, wenn man die Function  $f(\mu)$  durch folgende Gleichung definirt

$$6) \quad F(\mu) = (2^\mu - 1) \left( \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} - \dots \right) \sqrt{\frac{\Gamma(\mu)}{(2\pi)^\mu \sin \frac{1}{2} \mu \pi}};$$

es ist dann

$$7) \quad F(1 - \mu) = F(\mu).$$

Mittelst eines ganz analogen Verfahrens gelangt man auch rasch zu der anfangs erwähnten Relation zwischen  $\psi(\mu)$  und  $\psi(1 - \mu)$ . Wird nämlich in dem Integral

$$V = \int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}} x^{\mu-1} dx$$

die Entwicklung

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = e^{-x} - e^{-3x} + e^{-5x} - \dots$$

benutzt, so ergibt sich für jedes  $\mu > 0$

$$V = \Gamma(\mu) \psi(\mu);$$

durch Anwendung der Formel

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi)^2 + x^2} - \frac{3}{(\frac{3}{2}\pi)^2 + x^2} + \frac{5}{(\frac{5}{2}\pi)^2 + x^2} - \dots \right\}$$

wird dagegen unter der Voraussetzung  $0 < \mu < 1$

$$V = \left( \frac{\pi}{2} \right)^\mu \frac{\psi(1 - \mu)}{\sin \frac{1}{2} \mu \pi},$$

mithin durch Vergleichung beider Werthe von  $V$

$$8) \quad \frac{\psi(1 - \mu)}{\psi(\mu)} = \left( \frac{2}{\pi} \right)^\mu \Gamma(\mu) \sin \frac{1}{2} \mu \pi, \quad 0 < \mu < 1.$$

Um auch hier eine symmetrische Form herbeizuführen, möge die Function  $f(\mu)$  durch die Gleichung

$$f(\mu) = \left( \frac{1}{1^\mu} - \frac{1}{3^\mu} + \frac{1}{5^\mu} - \dots \right) \sqrt{\left( \frac{2}{\pi} \right)^\mu \Gamma(\mu) \sin \frac{1}{2} \mu \pi}$$

definirt werden; die Relation

$$10) \quad f(1 - \mu) = f(\mu)$$

gilt dann für die Function  $f$  wie früher für  $F$ .

Aus den Gleichungen 5) und 8) kann man durch Differentiation nach  $\mu$  weitere Relationen ableiten, die jedoch von wenig Bedeutung sein dürften.

(Aus den Sitzungsberichten der K. S. Gesellsch. d. Wissensch.)

SCHLÖMILCH.

gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol ist.

39. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines affin-veränderlichen, ähnlich-veränderlichen oder starren räumlichen Systems, welche gleiche Beschleunigung besitzen, ist ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Beschleunigungspol ist.\*

Da ähnliche räumliche Systeme eine reelle selbstentsprechende Ebene und eine auf dieser senkrecht stehende selbstentsprechende Gerade besitzen, und congruente räumliche Systeme nur eine selbstentsprechende Gerade haben, welche zwei congruente Punktreihen trägt, so folgt aus dem Satze 38 der specielle:

40. Der geometrische Ort der Systempunkte einer Phase eines ähnlich-veränderlichen räumlichen Systems, welche gleiche Geschwindigkeit besitzen, ist ein Rotationsellipsoid, dessen Mittelpunkt der Geschwindigkeitspol, dessen Axe die selbstentsprechende Gerade ist, welche die Systemphase mit ihrer unendlich nahe Phase gemeinsam hat und welches bei einem starren räumlichen System in einen Rotationscylinder übergeht.

Wir wollen das Ellipsoid, dessen Punkte gleiche Geschwindigkeit besitzen, das Geschwindigkeitsellipsoid und das Ellipsoid, welche die Punkte gleicher Beschleunigung trägt, das Beschleunigungsellipsoid nennen; jenes geht für die Geschwindigkeit Null in den Geschwindigkeitspol über und dieses zieht sich für die Beschleunigung Null in den Beschleunigungspol zusammen.

Sind drei Ebenen  $E_h E_i E_k$  gegeben, welche sich in einem Punkte schneiden, und denken wir uns die Geraden  $g_a g_b g_c \dots$  im Raume liegen, welche diese Ebenen resp. in den Punkten  $A_h A_i A_k, B_h B_i B_k, C_h C_i C_k$  derart treffen, dass

$$\frac{A_h A_i}{A_i A_k} = \frac{B_h B_i}{B_i B_k} = \frac{C_h C_i}{C_i C_k} = \dots = \text{const.}$$

ist, nehmen wir ferner auf diesen Geraden die ähnlichen Punktreihen  $A_1 A_2 A_h A_i A_k, B_1 B_2 B_h B_i B_k, C_1 C_2 C_h C_i C_k, \dots$  an, so können wir die Geraden  $g_a g_b g_c \dots$  als die Verbindungsgeraden der homologen Punkte  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2, \dots$  zweier räumlicher affiner Systeme  $S_1, S_2$  ansehen, für welche  $P$  der selbstentsprechende Punkt und  $E_h E_i E_k$  die drei selbstentsprechenden Ebenen sind. Ist insbesondere

\* Dieser Satz wurde für das starre System laut einer brieflichen Mittheilung zuerst von Herrn Schell in seinem Vortrage zu Karlsruhe im Jahre 1871 analytisch abgeleitet, ferner von Herrn Jordan und dann auch von Herrn Liguine (*Bullet de la Société mathématique de France* 1873, T. I pag. 146 et 152) mitgetheilt.



Winkel  $D$  in die Theile  $y$  und  $v$ , so dass  $x$  und  $y$  im Dreieck  $ABD$  liegen. Nennt man  $O$  und  $J$  die Mittelpunkte der Kreise, setzt  $x - y = \delta$ ,  $u - v = \delta_1$ , so erhält man aus den Dreiecken  $AOJ$  und  $COJ$

$$1) \quad \cos \frac{\delta}{2} = \frac{(r^2 - d^2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2}{2r\rho \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\delta_1}{2} = \frac{(r^2 - d^2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2}{2r\rho \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Da  $AB + CD = AD + BC$  ist, so hat man

$$\sin x - \sin y = \sin u - \sin v$$

oder

$$2) \quad \frac{\sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta_1}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Durch Elimination von  $\delta$  und  $\delta_1$  aus den Gleichungen 1) und 2) erhält man

$$\frac{4r^2\rho^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \left[ (r^2 - d^2) \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2 \right]^2}{4r^2\rho^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \left[ (r^2 - d^2) \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2 \right]^2} = 1$$

und endlich

$$2\rho^2(r^2 + d^2) = (r^2 - d^2)^2.$$

Weissenburg i. E.

MILINOWSKI.









Allgemeiner sei

$$R = (p + qi)e_2 + (1 - p - qi)e_1$$

ein aus zwei gegebenen Punkten ( $e_1$  und  $e_2$ ) mittelst complexer Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleiteter Punkt. Dann erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären

$$R = [pe_2 + (1 - p)e_1] + qi(e_2 - e_1).$$

(Fig. 2.) Bezeichnet man den Punkt  $pe_2 + (1 - p)e_1$  durch  $P$ , so dass seine Lage durch die Gleichung

$$(P - e_1) = p(e_2 - e_1)$$

bestimmt ist, so ist, wenn wir die Strecke  $(e_2 - e_1) = 1$  setzen,

$$p = (P - e_1).$$

Bestimmen wir ferner einen Punkt  $Q$  durch die Gleichung

$$(Q - e_1) = q(e_2 - e_1),$$

so ist

$$(Q - e_1)i = qi(e_2 - e_1)$$

und folglich

$$R = P + (Q - e_1)i$$

oder

$$(R - P) = (Q - e_1)i.$$

Tragen wir also auf der in  $e_1$  zu  $e_1e_2$  errichteten Senkrechten die Strecke  $q$  ab bis  $Q_1$  und ziehen durch  $P$  und  $Q_1$  Parallelen zu  $e_1Q$ , resp.  $e_1P$ , so schneiden sich dieselben in  $R$ . — Hiermit ist die Construction eines mittelst complexer Zahlen aus zwei Fundamentalpunkten abgeleiteten Punktes dargethan. — Setzen wir überall  $-i$  statt  $+i$ , so erhalten wir den zu  $R$  conjugirten Punkt  $R_1$ , und da

$$R_1 = P - (Q - e_1)i,$$

also

$$R + R_1 = 2P$$

ist, so ist auch die Lage von  $R_1$  bestimmt, indem  $P$  die Mitte zwischen  $R$  und  $R_1$  ist. (Raumlehre I, Nr. 20).

Der bereits bekannten Definition:

„Ein Punkt, der aus zwei Punkten  $e_1$  und  $e_2$  mittelst reeller Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleitet ist, liegt reell auf der durch  $e_1$  und  $e_2$  bestimmten Geraden“ (vergl. Raumlehre I, Nr. 26)

lässt sich nun die folgende gegenüberstellen:

„Ein Punkt ( $R$ ), der aus zwei Punkten  $e_1$  und  $e_2$  mittelst complexer Zahlen (deren Summe 1 ist) abgeleitet ist, liegt imaginär auf der durch  $e_1$  und  $e_2$  bestimmten Geraden. Den conjugirten Punkt ( $R_1$ ) findet man, wenn man  $+i$  durch  $-i$  ersetzt.“

Anm. Ersetzt man in der ganzen Darstellung dieser Nummer den Punkt  $e_2$  durch die Zahl 1, und  $e_1$  durch Null, so erhält man die Darstellung complexer Zahlen, wie sie von Möbius, Gauss, Siebeck





















$P$  die Mitte zwischen den beiden conjugirten imaginären Punkten  $R$  und  $R_1$ . — Durch zwei imaginär liegende Punkte ( $R, S$ ) kann eine reelle (wenn  $R, S, P$  in derselben Geraden liegen) oder eine imaginär liegende Gerade gehen. Im zweiten Falle ist die Verbindungslinie ihrer conjugirten Punkte ( $R_1, S_1$ ) die zu  $RS$  conjugirte Gerade.

Man erhält diese Resultate auch, von  $Ba$  ausgehend, durch Betrachtungen, welche reciprok zu denen sind, welche von  $Aa$  zu  $Ab$  führen. Wenn dort die reelle Gerade und ein imaginäres conjugirtes Punktpaar gegeben war, so erhielt man ein conjugirtes Linienpaar, wenn man einen beliebigen Punkt der reellen Geraden mit den conjugirten Punkten verband. Wenn hier der reelle (endlich entfernte) Punkt und ein imaginäres conjugirtes Linienpaar (mit gleichem Abstände von dem Punkte) gegeben ist, so erhält man ein conjugirtes Punktpaar, wenn man eine beliebige Gerade durch den reellen Punkt zieht und ihre Schnittpunkte mit den conjugirten Geraden bestimmt.

Anm. Es mag hier noch bemerkt werden, dass nach den Gesetzen der Ausdehnungslehre ein Punkt durch Multiplication mit einer reellen Zahl seine Lage nicht ändert, wohl aber durch Multiplication mit einer imaginären Zahl.

## II. Das Imaginäre im Raume.

### A. Das Imaginäre in Bezug auf die Ebene.

#### a) Punktpaare.

Dieser Fall ist ganz analog dem der Punktpaare, die zu einer Geraden imaginär liegen (I. Aa). Ein Punktpaar liegt imaginär auf der Ebene, die in der Mitte seiner Verbindungsstrecke auf ihr senkrecht steht. Das Punktpaar bestimmt diese Ebene vollständig. Umgekehrt liegen auf einer Ebene imaginär alle Punktpaare, deren Verbindungsstrecke auf der Ebene senkrecht steht und durch sie halbirt wird. Man erhält diese Resultate, wenn man in der früheren analogen Betrachtung die Gerade  $e_3e_2$  (Fig. 1) um die Verbindungsstrecke der beiden Punkte  $B, B_1$  als Axe sich drehen lässt.

Lässt man Fig. 5 sich um die Axe  $PQ$  drehen, so folgt: Eine Ebene ( $B_1D_1$ ) schneidet eine ausserhalb liegende Kugelfläche  $\sigma$  imaginär in zwei Punkten ( $P, Q$ ), den Centralpunkten des durch die Ebene und die Kugel bestimmten orthogonalen Systems. Lässt man dieselbe Figur sich um eine in  $O$  auf  $AC$  senkrecht stehende Axe drehen, so folgt: Eine Cylinderfläche schneidet eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt auf der Axe der ersteren liegt, imaginär in zwei von  $P$  und  $Q$  beschriebenen Kreisen. — Dasselbe gilt von einer Kegelfläche, wenn die Drehung um eine andere durch  $O$  gehende Axe stattfindet.







## VIII.

### Zur Theorie dreifach orthogonaler Flächensysteme.

Von

Dr. TH. KÖTTERITZSCH,  
Oberlehrer in Freiberg.

---

In einer Programmabhandlung, die jüngst auch gesondert im Buchhandel erschienen ist, hat der Verfasser das Thema behandelt: „Die Ermittlung der Potentialcoordinaten und der Krümmungslinien einer gegebenen Niveaufläche durch blosse Quadraturen.“ Jene Abhandlung konnte den überreich im Thema enthaltenen Stoff nur zum geringeren Theile erschöpfen, sie gab im Wesentlichen nur soviel, als man aus den allgemeinen Sätzen Lamé's in seinen „*Leçons sur les coordonnées curvilignes*“ und einigen verwandten und bekannten anderen überhaupt abzuleiten im Stande ist. Die folgenden Zeilen sollen das oben genannte Problem um ein Stück seiner Lösung weiter zuführen.

Um an Raum zu sparen, nehmen wir im Folgenden die Bezeichnungen der obigen Abhandlung ohne Weiteres wieder auf und leiten Citate, die sich auf diese Abhandlung beziehen, kurz ein durch ein vorgesetztes Pg.

Wir beginnen damit, dass wir zu den in der Programmabhandlung aufgeführten Relationen noch einige neue hinzufügen, die theils bekannt, theils aus den am angeführten Orte stehenden Formeln leicht abgeleitet werden können.

Zu den Relationen Pg. Cap. IV, § 1, 3 kann man ergänzen

$$\text{A) } l^2 + a_1^2 + a_2^2 = m^2 + b_1^2 + b_2^2 = n^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1, \\ lm + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad mn + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0, \quad nl + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0.$$

Zu Pg. Cap. IV, § 1, 7 kann man ergänzen

$$\text{B) } \frac{dF}{dx} = \frac{1}{n} \left( b_2 \frac{\partial F}{\partial n_\beta} - b_1 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma} \right), \quad \frac{dF}{dy} = \frac{1}{n} \left( a_1 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma} - a_2 \frac{\partial F}{\partial n_\beta} \right).$$

Zu Pg. Cap. IV, § 1, 17 kann man hinzufügen, dass allgemein für jede stetige Function  $F$  der Punkte der gegebenen Niveaufläche gilt





$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\beta} \right) &= -M \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( U \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) = -M U \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} - M \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \\
&= -M U \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) + U \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial l U}{\partial n_\alpha} \\
&= -M \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( -\frac{1}{M} \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) + e_1 \frac{\partial F}{\partial n_\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \frac{\partial l M}{\partial n_\beta} + e_1 \frac{\partial F}{\partial n_\beta} \\
&= \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) - G \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} + e_1 \frac{\partial F}{\partial n_\beta}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) - H \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} + e_2 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma},$$

so dass wir die neuen Relationen erhalten, die der früheren Relation entsprechen:

$$\begin{aligned}
3) \quad \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\beta} \right) + G \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) + e_1 \frac{\partial F}{\partial n_\beta}, \\
\frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\gamma} \right) + H \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial F}{\partial n_\alpha} \right) + e_2 \frac{\partial F}{\partial n_\gamma}.
\end{aligned}$$

Es ist nicht schwer, mit Hilfe dieser Relationen 3) und C) aus den Gleichungen 1) und 2) und Pg. Cap. IV, § 1, 10 die Lamé'schen Relation abzuleiten. Geht man z. B. aus von  $a_1 e_1 = \frac{\partial l}{\partial n_\beta}$  und differentiirt beiseits nach  $\partial n_\alpha$ , so erhält man

$$a_1 \frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} + e_1 \frac{\partial a_1}{\partial n_\alpha} = \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial l}{\partial n_\beta} \right) = \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial l}{\partial n_\alpha} \right) - G \frac{\partial l}{\partial n_\alpha} + e_1 \frac{\partial l}{\partial n_\beta}.$$

Hieraus wird aber weiter

$$\begin{aligned}
a_1 \frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} + l G e_1 + \frac{\partial}{\partial n_\beta} (a_1 G + a_2 H) - G (a_1 G + a_2 H) &= a_1 e_1^2, \\
a_1 \left( \frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial n_\beta} - G^2 - e_1^2 \right) + l G e_1 + G (a_2 e - l e_1) \\
&\quad + a_2 \left( \frac{\partial H}{\partial n_\beta} - G H \right) - a_1 H e = 0, \\
a_1 \left( \frac{\partial G}{\partial n_\beta} + \frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} - H e - G^2 - e_1^2 \right) + a_2 \left( \frac{\partial H}{\partial n_\beta} + G e - G H \right) &= 0.
\end{aligned}$$

Nun ist nach der fünften der Lamé'schen Relationen

$$\frac{\partial H}{\partial n_\beta} + G e - G H = 0,$$

folglich auch, da  $a_1$  im Allgemeinen nicht verschwindet,

$$\frac{\partial G}{\partial n_\beta} + \frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} = H e + G^2 + e_1^2.$$

Dies ist aber die letzte der Lamé'schen Relationen.



Diese Gleichungen 6) sind nicht so einfach, als die 5), weil auch die Variationen  $\frac{\partial G}{\partial n_\beta}$  und  $\frac{\partial H}{\partial n_\gamma}$  auf den rechten Seiten vorkommen; sie unterscheiden sich aber zu ihrem Vorthail von den Gleichungen 5) dadurch, dass in jeder Gleichung nur eine der unbekannten Functionen  $G$  oder  $H$  mit ihrer Derivirten entweder als  $\frac{\partial G}{\partial n_\beta}$  oder als  $\frac{\partial H}{\partial n_\gamma}$  vorkommt.

Zu einer Reihe wichtiger neuer Relationen gelangen wir noch, wenn wir die bisherigen Ergebnisse anwenden auf die Variationen nach  $\partial n_\alpha$ , die aus den Lamé'schen Relationen entstehen. Von diesen aber sind ohne Weiteres die dritte und sechste der Lamé'schen Relationen hier zu wiederholen in der Form

$$7) \quad \frac{\partial r}{\partial n_\alpha} = \varrho_2(r - G), \quad \frac{\partial \varrho}{\partial n_\alpha} = \varrho_1(\varrho - H).$$

Die erste und zweite und ebenso die beiden letzten der Lamé'schen Relationen eignen sich aber hier nicht zur weiteren Discussion, weil sie die Variationen  $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\alpha}$  und  $\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\alpha}$  entweder als neue unbekannte Functionen einführen würden oder schon enthalten. Differentiirt man ferner die drittletzte der Lamé'schen Relationen nach  $\partial n_\alpha$ , so ist das Ergebniss die Summe der mit  $\varrho_1$  multiplicirten vorletzten und der mit  $\varrho_2$  multiplicirten letzten Lamé'schen Relation. Es bleibt also hier allein die Behandlung der vierten und fünften Lamé'schen Relation übrig, die wir jetzt schreiben in den Formen

$$\frac{\partial G}{\partial n_\gamma} = H(G - r), \quad \frac{\partial H}{\partial n_\beta} = G(H - \varrho).$$

Differentiiren wir nun diese beiden Gleichungen nach  $\partial n_\alpha$ , so entsteht

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial G}{\partial n_\gamma} \right) &= H \frac{\partial G}{\partial n_\alpha} + G \frac{\partial H}{\partial n_\alpha} - H \frac{\partial r}{\partial n_\alpha} - r \frac{\partial H}{\partial n_\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial n_\alpha} \left( \frac{\partial H}{\partial n_\beta} \right) &= G \frac{\partial H}{\partial n_\alpha} + H \frac{\partial G}{\partial n_\alpha} - G \frac{\partial \varrho}{\partial n_\alpha} - \varrho \frac{\partial G}{\partial n_\alpha}. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier die linken Seiten durch ihre Werthe aus 5) und wendet auf die rechten Seiten die Relationen 4) und 7) an, so erscheinen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} G H (\varrho_1 + \varrho_2) - G \left( \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} + 2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} \right) - H \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} + 2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial (\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial n_\beta} \right) - r \frac{\partial (\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial n_\gamma}, \\ G H (\varrho_1 + \varrho_2) - G \left( \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} + 2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} \right) - H \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} + 2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta} \right) \\ = - \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial (\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial n_\gamma} \right) - \varrho \frac{\partial (\varrho_1 + \varrho_2)}{\partial n_\beta}, \end{aligned}$$



$$10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} \right) - r \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} &= (G - r)(H - e) - \left( \frac{\partial e}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r e \right), \\ \frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial l k}{\partial n_\beta} \right) - e \frac{\partial l k}{\partial n_\beta} &= (G - r)(H - e) - \left( \frac{\partial e}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r e \right). \end{aligned}$$

## § 2.

**Anwendungen der bisherigen Resultate.**

Durch die Gleichungen 9) und 10) des vorigen Paragraphen sind die Resultate von Pg. Cap. IV, § 3 in wesentlich weitergehender und erfolgreicherer Weise ersetzt; es ist daher auch möglich, jetzt in deutlicherer Weise durch Verwendung der eben gewonnenen Resultate der Lösung des ganzen Problems näher zu kommen. Abgesehen nämlich von einem Ausnahmefalle, sind wir nun im Stande, den Beweis durch den Erfolg der Rechnung selbst zu liefern, dass  $M$ ,  $k$ ,  $U$  und  $V$  durch einfache Quadraturen gefunden, also auch das ganze vorliegende Problem durch einfache Quadraturen gelöst werden könne, wenn man in den Besitz von nur einer der beiden Functionen  $G$  oder  $H$  gelangt ist.

Der erwähnte Ausnahmefall tritt dann ein, wenn eine der beiden Functionen  $G$  oder  $H$  der Null gleich wird. Betrachten wir, um diesen Ausnahmefall vollständig zu erschöpfen, zuerst den Ausnahmefall

$$G = H = 0.$$

Dann folgt wegen  $G = \frac{\partial l M}{\partial n_\beta} = U \frac{\partial l M}{\partial \beta}$ ,  $H = \frac{\partial l M}{\partial n_\gamma} = V \frac{\partial l M}{\partial \gamma}$ , weil  $U$  und  $V$  nicht verschwinden können, dass auch

$$\frac{\partial l M}{\partial \beta} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial l M}{\partial \gamma} = 0.$$

Es kann folglich  $l M$  nur Function von  $\alpha$  sein und ist, da  $\alpha$  für alle Punkte jeder einzelnen Niveaufläche constant ist, selbst ein constanter Werth für diese Punkte.

Da ferner

$$\frac{\partial l M}{\partial n_\alpha} = -M \frac{\partial l M}{\partial \alpha} = e_1 + e_2$$

ebenfalls nur abhängig von  $\alpha$  sein kann, so folgt, dass für alle die Flächen, für welche  $G = H = 0$  sein kann,  $e_1 + e_2$  ein unveränderlicher Werth sein muss.

Weiter ergeben die beiden letzten Lamé'schen Relationen

$$\frac{\partial e_1}{\partial n_\alpha} = e_1^2, \quad \frac{\partial e_2}{\partial n_\alpha} = e_2^2.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial n_\alpha} (e_1 + e_2) = e_1^2 + e_2^2$$

oder



$\varrho_2 = 0$ ,  $\varrho_1 \geq 0$ , so wird jetzt  $\frac{\partial lM}{\partial \varrho_1} \varrho_1^2 = \varrho_1$ , also durch Integration  $M = A' \varrho_1$ ,

wenn  $lA'$  die neue Integrationsconstante vertritt, und aus  $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\alpha} = \varrho_1^2$  folgt

jetzt  $-A' \varrho_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial \alpha} = \varrho_1^2$ , also durch Integration

$$\alpha = -A' l B' \varrho_1,$$

wenn  $lB'$  die neue Integrationsconstante vertritt. Hiermit ist aber die zugehörige Niveaufächenschaar charakterisirt als Schaar concentrischer gerader Kreiscylinder, deren entsprechendes Potentialkoordinatensystem ebenfalls längst bekannt ist.

Wir kommen jetzt zur genaueren Untersuchung des Ausnahmefalles, dass nur eine der beiden Functionen  $G$  oder  $H$  der Null gleich, die andere aber davon verschieden ist. Setzen wir also

$$H = 0, \quad G \geq 0.$$

Es folgt jetzt aus der Lamé'schen Relation  $\frac{\partial H}{\partial n_\beta} = G(H - \varrho)$ , dass auch  $\varrho = 0$ , dass folglich die Flächen  $\gamma = \text{Const.}$  durchaus die Krümmung 0 besitzen, d. h. Ebenen sind. Die eine Schaar der Krümmungslinien der zugehörigen Niveaufächen müssen also ebenfalls ebene Curven sein; es sind dies diejenigen, zu denen die Krümmung  $\varrho_1$  gehört.

Wir wenden uns jetzt zur genaueren Untersuchung der andern Schaar von Krümmungslinien, von denen wir also irgend ein Element durch  $\partial n_\gamma$  darstellen können.

Nach der Lamé'schen Relation  $\varrho(\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma}$  folgt wegen  $\varrho = 0$ , dass auch  $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} = 0$ . Längs jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist also  $\varrho_1$  von unveränderlicher Grösse. Deswegen und wegen  $H = 0$  folgt weiter aus der Relation 4, § 1,  $\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} = 0$ . Längs jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar ist also auch  $\varrho_2$  von unveränderlicher Grösse. Weiter gilt auch die Lamé'sche Relation

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} = r(\varrho_2 - \varrho_1).$$

Wir differentiiren diese Relation nach  $\partial n_\gamma$ , wenden dabei auf die linke Seite die Relation C) an und beachten die eben gewonnenen Resultate, es erscheint

$$(\varrho_2 - \varrho_1) \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} = 0.$$

Da nun im Allgemeinen  $\varrho_2 - \varrho_1$  nicht verschwindet (der Fall  $\varrho_1 = \varrho_2$  führt auf den bereits behandelten Fall concentrischer Kugelflächen zurück), so





Nun findet man, wenn man Pg. Cap. IV, § 1, 10 beachtet und ausserdem bedenkt, dass im jetzigen Falle  $\frac{\partial r}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} = 0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma} (lr + a_1 \varrho_2) = \frac{\partial}{\partial n_\gamma} (mr + b_1 \varrho_2) = \frac{\partial}{\partial n_\gamma} (nr + c_1 \varrho_2) = 0.$$

Es ist daher auch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \mu}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial \nu}{\partial n_\gamma} = 0.$$

Irgend zwei aufeinanderfolgende Schmiegungeebenen einer Krümmungslinie der zweiten Schaar fallen also zusammen, d. h. auch die zweite Schaar der Krümmungslinien sind ebene Curven.

Nun haben wir bereits gefunden, dass die Krümmung jeder einzelnen der Krümmungslinien der zweiten Schaar unveränderlich ist; wir kommen daher jetzt zu dem Resultate: Die zweite Schaar der Krümmungslinien besteht entweder aus geraden Linien oder aus Kreisen.

Um diese beiden Fälle hier weiter noch gemeinsam behandeln zu können, fassen wir die Gerade als Kreis mit unendlich grossem Radius auf.

Irgend zwei nicht zusammenfallende Ebenen der Schaar  $\gamma = \text{Const.}$  treffen alle diese Kreise in gewissen Punkten derart, dass, wenn man in den Treffpunkten Tangenten an die Kreise legt, diese Tangenten senkrecht stehen auf der zugehörigen Ebene  $\gamma = \text{Const.}$  Dies ist aber nur möglich, wenn die beiden Ebenen  $\gamma = \text{Const.}$  auch die Mittelpunkte sämtlicher Kreise enthalten. Da nun die beiden Ebenen  $\gamma = \text{Const.}$  sich in einer Geraden schneiden, so folgt, dass auch die Mittelpunkte sämtlicher Kreise in einer Geraden liegen müssen. In derselben Geraden müssen sich auch alle anderen Ebenen  $\gamma = \text{Const.}$  schneiden und da auch diese Ebenen normal von den Kreisen getroffen werden müssen, so folgt, dass die Gerade, welche die Mittelpunkte sämtlicher Kreise enthält, normal auf allen Ebenen der Kreise stehen muss oder dass die Kreise selbst in parallelen Ebenen liegen, die senkrecht sind zu den Ebenen  $\gamma = \text{Const.}$

Hierdurch aber sind die hier in Frage kommenden Niveauflächen genug charakterisirt, man erkennt sie als Cylinderflächen oder als Rotationsflächen, je nachdem die Gerade, welche die Kreismittelpunkte enthält, in unendlicher oder in endlicher Entfernung liegt.

Da in diesem Endresultate auch der Fall  $G = H = 0$  mit enthalten ist, so fassen wir unser Endresultat in die Worte zusammen: Der Ausnahmefall, wo die Gleichungen 9) und 10), § 1, keine Verwendung finden können, tritt nur dann ein, wenn die gegebene Niveaufläche entweder eine Cylinderfläche oder eine Rotationsfläche ist.



Da aber  $\alpha$  für die gegebene Niveaulfläche ebenfalls constant ist, so ist  $M$  für Punkte der gegebenen Niveaulfläche nur abhängig von der einen Variablen  $\beta$ . Gleiches lässt sich auch von  $G$  darthun, da eine der Lamé'schen Relationen ist  $\frac{\partial G}{\partial n_\gamma} = H(G-r)$ , also, wegen  $H=0$  im vorliegenden

Falle, auch  $\frac{\partial G}{\partial n_\gamma} = 0$  sein muss. Ist aber  $G$  unabhängig von  $\gamma$ , so kann es wegen 1) nur als Function von  $x$  und  $y$  gegeben sein. Da nun ferner auch diese Variablen  $x$  und  $y$ , weil  $G$  für Punkte der gegebenen Niveaulfläche bekannt sein soll, die Gleichung der gegebenen Niveaulfläche  $f(x, y) = 0$  erfüllen müssen, so kann man mit Hilfe dieser Gleichung eine der Variablen  $x$  und  $y$ , etwa  $y$  eliminiren, so dass  $G$  als Function von  $x$  allein bekannt ist. Weiter ist nach Pg. Cap. IV, § 1 auch allgemein

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta} = -a_1 \frac{\partial lM}{\partial x} - b_1 \frac{\partial lM}{\partial y} - c_1 \frac{\partial lM}{\partial z}.$$

Nun haben wir bereits gesehen, dass  $lM$  unabhängig ist von  $\gamma$ , also nach 1) auch von  $z$ , folglich ist einfacher

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta} = -a_1 \frac{\partial lM}{\partial x} - b_1 \frac{\partial lM}{\partial y}.$$

Ebenso, wie in der Function  $G$ , haben wir uns aber auch in  $lM$  die Variablen  $x$  und  $y$  noch an einander gebunden zu denken durch die Gleichung der gegebenen Niveaulfläche  $f(x, y) = 0$ . Denken wir uns also  $x$  als unabhängige,  $y$  als abhängige Variable, so ist

$$\frac{dlM}{dx} = \frac{\partial lM}{\partial x} + \frac{\partial lM}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial lM}{\partial x} - \frac{l}{m} \frac{\partial lM}{\partial y}.$$

Da ferner im jetzigen Falle aus der allgemein giltigen Relation  $la_1 + mb_1 + nc_1 = 0$  wegen  $n=0$  wird  $la_1 + mb_1 = 0$ , so kann nun der obige Werth von  $\frac{\partial lM}{\partial n_\beta}$  auch geschrieben werden als

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta} = -\frac{a_1}{m} \left( m \frac{\partial lM}{\partial x} - l \frac{\partial lM}{\partial y} \right) = -a_1 \frac{dlM}{dx}.$$

Aus 4) entsteht demnach

$$5) \quad \frac{dlM}{dx} = -\frac{1}{a_1} \cdot G.$$

Durch einfache Quadratur findet man hieraus

$$lM = lA - \int \frac{1}{a_1} G dx,$$

wenn  $lA$  die Integrationsconstante bezeichnet, die im Allgemeinen als Function von  $\alpha$  zu denken ist. Geht man in 6) noch von den Logarithmen zu den Zahlen über, so entsteht

$$7) \quad M = A \cdot e^{-\int \frac{1}{a_1} G dx}.$$



$$15) \quad \frac{\partial w}{\partial n_\beta} - r w = (G - r)(H - \varrho) - \left( \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r \varrho \right),$$

in welcher Gleichung die rechte Seite als Function der beiden unabhängig Variablen  $x$  und  $y$  vollständig bekannt ist. Wir zerlegen  $w$  in das Product  $w_1 w_2$ , so dass die Gleichung 15) übergeht in

$$16) \quad w_2 \left( \frac{\partial w_1}{\partial n_\beta} - r w_1 \right) + w_1 \frac{\partial w_2}{\partial n_\beta} - (G - r)(H - \varrho) + \left( \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r \varrho \right) = 0.$$

Diese Gleichung 16) zerlegen wir in die beiden

$$17) \quad \frac{\partial w_1}{\partial n_\beta} - r w_1 = 0,$$

$$18) \quad \frac{\partial w_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{w_1} \left[ (G - r)(H - \varrho) - \left( \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r \varrho \right) \right].$$

Die Gleichung 17) lässt sich schreiben in der Form

$$19) \quad -a_1 \frac{d l w_1}{d x} - b_1 \frac{d l w_1}{d y} = r.$$

Ist nun weiter  $f_1(x, y) = c_1$  die Integralgleichung zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$b_1 dx - a_1 dy = 0, *$$

so behaupten wir, dass die Bestimmungen

$$20) \quad l w_1 = - \int \frac{r}{a_1} dx + C_1 \text{ oder } l w_1 = - \int \frac{r}{b_1} dy + C_2$$

die Gleichung 17) integrieren, wenn man in  $\frac{r}{a_1} y$  oder in  $\frac{r}{b_1} x$  mit Hilfe der Integralgleichung  $f_1(x, y) = c_1$  eliminirt denkt und wenn  $C_1$  und  $C_2$  die Integrationsconstanten bezeichnen, die auch als Functionen von  $c_1$  gedacht werden können. Nach geschehener Integration ist die Integrationsconstante  $c_1$  wieder durch  $f_1(x, y)$  zu ersetzen.

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, weisen wir zunächst nach, dass man für  $C_1$  oder  $C_2$  jede beliebige reelle, von 0 und  $\infty$  verschiedene, stetig verlaufende Function setzen kann, die unabhängig von  $\beta$  ist. Da nämlich  $C_1$  oder  $C_2$  nur Function von  $c_1 = f_1(x, y)$  sein soll, so können wir setzen

$$C_1 = \psi_1(c_1) = \psi_1(f_1(x, y)), \quad C_2 = \psi_2(c_1) = \psi_2(f_1(x, y)).$$

Hieraus folgt, da das totale Differential von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  offenbar Null sein muss,

$$d\psi_1 = \frac{\partial \psi_1}{\partial f_1} \left[ \frac{df_1}{dx} dx + \frac{df_1}{dy} dy \right] = 0, \quad d\psi_2 = \frac{\partial \psi_2}{\partial f_1} \left[ \frac{df_1}{dx} dx + \frac{df_1}{dy} dy \right] = 0.$$

Aus jeder dieser beiden Gleichungen ergibt sich

---

\* Vergl. die Bemerkung, welche am Schlusse der Betrachtung über cylindrische und Rotations-Niveauflächen in Bezug auf die Integration derartiger Differentialgleichungen gemacht wurde.



also auch beide Bestimmungen zusammenfassen können in der einen Form

$$23) \quad l w_1 = \varphi_1(x, y) + l \Gamma_1,$$

wenn  $\varphi_1(x, y)$  diejenige Function vertritt, die aus den Bestimmungen 20) durch Ausführung der Quadratur und Ersetzung von  $c_1$  durch  $f_1$  erscheint.

Aus 23) erhalten wir weiter

$$24) \quad w_1 = \Gamma_1 \cdot e^{\varphi_1(x, y)}.$$

Wir wenden uns jetzt zur Integration der Differentialgleichung 18), indem wir für dieselbe, da  $\Gamma_1$  von  $\beta$  unabhängig ist, schreiben können

$$25) \quad \frac{\partial(\Gamma_1 w_2)}{\partial n_\beta} = e^{-\varphi_1(x, y)} \left[ (G - r)(H - \varrho) - \left( \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r \varrho \right) \right].$$

Diese Differentialgleichung kann aber ganz so, wie die 17) integriert werden, indem allein für  $l w_1$  jetzt  $\Gamma w_2$ , für  $r$  jetzt

$$e^{-\varphi_1(x, y)} \left[ (G - r)(H - \varrho) - \left( \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} + \frac{\partial r}{\partial n_\gamma} - r \varrho \right) \right]$$

zu setzen ist.

Es muss daher auch das Integrationsergebniss ein ganz analoges sein. Wir schreiben für dasselbe sofort

$$26) \quad \Gamma_1 w_2 = \varphi_2(x, y) + \Gamma,$$

wo nun ebenfalls  $\varphi_2(x, y)$  eine vollständig bekannte Function ist, die sich durch eine bloße Quadratur ergibt, während  $\Gamma$  eine Function von  $y$  allein (für die Punkte der gegebenen Niveaufläche) bezeichnet.

Weiter erhalten wir aus 24) und 26)

$$w = w_1 w_2 = e^{\varphi_1(x, y)} (\varphi_2(x, y) + \Gamma)$$

und, da  $w = \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$  war, schliesslich

$$27) \quad \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} = e^{\varphi_1(x, y)} [\varphi_2(x, y) + \Gamma].$$

In ganz ähnlicher Weise, wie sich eben aus den Gleichungen 10), § 1  $\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$  ergeben hat, finden wir jetzt auch aus der zweiten jener Gleichungen  $\frac{\partial l k}{\partial n_\beta}$  in der Form

$$28) \quad \frac{\partial l k}{\partial n_\beta} = e^{\psi_1(x, y)} [\psi_2(x, y) + B],$$

für die Punkte der gegebenen Niveaufläche, indem  $B$  eine reelle eindeutige und stetige, von Null und Unendlich verschiedene Function von  $\beta$  allein bezeichnet. Man findet dieses Resultat ebenfalls durch Integration der Differentialgleichung

$$b_2 dx - a_2 dy = 0$$

und übrigens durch bloße Quadraturen.





Wie aus den Gleichungen 12)  $M$  in 14) durch bloße Quadraturen gefunden wurde, so finden wir also auch jetzt aus den Gleichungen 30)

$$31) \quad U = A_1 e^{W_1}, \quad V = A_2 e^{W_2},$$

für die Punkte der gegebenen Niveaufläche, wenn  $A_1$  und  $A_2$  Integrationsconstanten bezeichnen, die im Allgemeinen auch Functionen von  $\alpha$  sein können.

Nachdem somit  $M$ ,  $U$  und  $V$  für die Punkte der gegebenen Niveaufläche ermittelt sind, so ergibt sich noch aus Pg. Cap. I, § 2, 2 durch Substitution der gefundenen Werthe von  $M$ ,  $U$  und  $V$

$$A e^W = k A_1 e^{W_1} A_2 e^{W_2},$$

hieraus aber schliesslich

$$32) \quad k = \frac{A}{A_1 A_2} e^{W - (W_1 + W_2)}$$

ebenfalls für die Punkte der gegebenen Niveaufläche.

Es hängt also die Lösung des ganzen vorliegenden Problems, abgesehen von dem in der zweiten Bemerkung Gesagten, allein noch ab von der Beschaffung der Function  $G$ .

### § 3.

#### Beispiel.

Lamé hat in seinen *Leçons sur les coord. curv.* gezeigt, dass die drei Mittelpunktsflächen zweiten Grades so beschaffen sind, dass man das sich orthogonal schneidende homofocale System derselben so umformen kann, dass, wenn sie zusammengefasst werden in den Formen  $\alpha = \text{Const.}$ ,  $\beta = \text{Const.}$ ,  $\gamma = \text{Const.}$ , man  $\Delta_2(\beta) = \Delta_2(\gamma) = 0$  setzen kann. Wir werden aus dieser letzteren Bedingung allein die zugehörige Function  $G$  ermitteln und damit zur Lösung des Problems gelangen, soweit es in den vorangehenden Zeilen genauer besprochen worden ist.

Wir stellen jede der drei in Rede stehenden Flächen allgemein dar durch

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \quad a > b > c.$$

Wir schreiben als Gleichung der gegebenen Niveaufläche

$$f(x, y, z) = \frac{a}{2} x^2 + \frac{b}{2} y^2 + \frac{c}{2} z^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Wir erhalten hieraus für die Werthe  $A$ ,  $B$  und  $C$  in Pg. Cap. II, § 1, wenn wir noch dem dortigen  $l$  das entgegengesetzte Vorzeichen geben und anstatt  $\alpha$   $f$  geschrieben denken,

$$1) \quad A = ax(b+l)(c+l), \quad B = by(c+l)(a+l), \quad C = cz(a+l)(b+l).$$

Da nun überhaupt sein muss

$$A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} + C \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

so finden wir hieraus durch Substitution der gehörigen Werthe

$$2) \quad a^2 x^2 (b+l)(c+l) + b^2 y^2 (c+l)(a+l) + c^2 z^2 (a+l)(b+l) = 0.$$

Die Wurzeln dieser in  $l$  quadratischen Gleichung liegen so, dass, wenn wir sie mit  $l_1$  und  $l_2$  bezeichnen, ihre absoluten Werthe der Bedingung genügen

$$a \geq l_1 \geq b \geq l_2 \geq c.$$

Wir führen nun  $l_1$  und  $l_2$  als neue Coordinaten für die Punkte  $x y z$  der gegebenen Niveauläche ein und haben zu diesem Zwecke

$$3) \quad \begin{aligned} a x^2 + b y^2 + c z^2 &= 1, \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = \frac{a b c}{l_1 l_2}, \\ a^2 x^2 (b+c) + b^2 y^2 (c+a) + c^2 z^2 (a+b) &= -a b c \cdot \frac{l_1 + l_2}{l_1 l_2}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, wenn zur Abkürzung noch

$$4) \quad D = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b},$$

$$5) \quad \begin{aligned} a^2 x^2 &= \frac{b-c}{D} \frac{(a+l_1)(a+l_2)}{l_1 l_2}, \\ b^2 y^2 &= \frac{c-a}{D} \frac{(b+l_1)(b+l_2)}{l_1 l_2}, \\ c^2 z^2 &= \frac{a-b}{D} \frac{(c+l_1)(c+l_2)}{l_1 l_2}. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir nun leicht für die Cosinus der Neigungswinkel der Normalen der gegebenen Niveauläche im Punkte  $x y z$  gegen die Coordinatenachsen

$$6) \quad \begin{aligned} l &= \sqrt{\frac{b-c}{a b c D} (a+l_1)(a+l_2)}, \\ m &= \sqrt{\frac{c-a}{a b c D} (b+l_1)(b+l_2)}, \\ n &= \sqrt{\frac{a-b}{a b c D} (c+l_1)(c+l_2)}. \end{aligned}$$

Setzen wir in 1) für  $l$  entweder  $l_1$  oder  $l_2$  und gehen dadurch entweder die Werthe von  $A_1, B_1, C_1$  oder von  $A_2, B_2, C_2$  hervor, so ist weiter

$$\begin{aligned} A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 &= N_1^2 \\ &= a^2 x^2 (b+l_1)^2 (c+l_1)^2 (a+l_1)^2 + b^2 y^2 (c+l_1)^2 (a+l_1)^2 + c^2 z^2 (a+l_1)^2 (b+l_1)^2, \\ A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 &= N_2^2 \\ &= a^2 x^2 (b+l_2)^2 (c+l_2)^2 + b^2 y^2 (c+l_2)^2 (a+l_2)^2 + c^2 z^2 (a+l_2)^2 (b+l_2)^2. \end{aligned}$$

Führen wir auch hier mit Hilfe der Gleichungen 5) anstatt  $x, y, z$  die Variablen  $l_1$  und  $l_2$  ein, so entsteht

$$N_1^2 = a b c \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2} (a+l_1)(b+l_1)(c+l_1),$$

$$N_2^2 = abc \cdot \frac{l_1 - l_2}{l_2 l_1} (a + l_2)(b + l_2)(c + l_2).$$

Für die Cosinus der Neigungswinkel der Normalen der beiden Orthogonalflächen im Punkte  $xyz$  der gegebenen Niveaufäche erhalten wir also

$$\begin{aligned} 7) \quad a_1 &= -\sqrt{\frac{b-c}{abcD} \frac{(a+l_2)(b+l_1)(c+l_1)}{l_2-l_1}}, \\ b_1 &= -\sqrt{\frac{c-a}{abcD} \frac{(b+l_2)(c+l_1)(a+l_1)}{l_2-l_1}}, \\ c_1 &= -\sqrt{\frac{a-b}{abcD} \frac{(c+l_2)(a+l_1)(b+l_1)}{l_2-l_1}}, \\ 8) \quad a_2 &= -\sqrt{\frac{b-c}{abcD} \frac{(a+l_1)(b+l_2)(c+l_2)}{l_1-l_2}}, \\ b_2 &= -\sqrt{\frac{c-a}{abcD} \frac{(b+l_1)(c+l_2)(a+l_2)}{l_1-l_2}}, \\ c_2 &= -\sqrt{\frac{a-b}{abcD} \frac{(c+l_1)(a+l_2)(b+l_2)}{l_1-l_2}}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun weiter die Derivirten von  $l_1$  und  $l_2$  nach  $\partial n_\beta$  und  $\partial n_\gamma$  herstellen. Hierzu benützen wir die Gleichungen 3), indem wir zunächst die Derivirten von  $\frac{1}{l_1}$  und  $\frac{1}{l_2}$  nach  $x, y$  und  $z$  daraus ableiten. Wir finden auf diese Weise

$$\begin{aligned} 9) \quad \frac{\partial l_1}{\partial x} &= \frac{2ax}{bc} \frac{l_1^2 l_2}{l_2 - l_1} (l_1 + b + c), \quad \frac{\partial l_1}{\partial y} = \frac{2by}{ca} \frac{l_1^2 l_2}{l_2 - l_1} (l_1 + c + a), \\ &\quad \frac{\partial l_1}{\partial z} = \frac{2cz}{ab} \frac{l_1^2 l_2}{l_2 - l_1} (l_1 + a + b), \\ \frac{\partial l_2}{\partial x} &= \frac{2ax}{bc} \frac{l_2^2 l_1}{l_1 - l_2} (l_2 + b + c), \quad \frac{\partial l_2}{\partial y} = \frac{2by}{ca} \frac{l_2^2 l_1}{l_1 - l_2} (l_2 + c + a), \\ &\quad \frac{\partial l_2}{\partial z} = \frac{2cz}{ab} \frac{l_2^2 l_1}{l_1 - l_2} (l_2 + a + b). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} &= -a_1 \frac{\partial l_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial l_1}{\partial y} - c_1 \frac{\partial l_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} = \dots, \\ \frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma} &= -a_2 \frac{\partial l_1}{\partial x} - b_2 \frac{\partial l_1}{\partial y} - c_2 \frac{\partial l_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = \dots. \end{aligned}$$

Setzt man die entsprechenden Werthe aus den Gleichungen 9) ein und benützt für die Zähler von  $a_1, b_1, \dots$  noch die obigen aus 1) abzuleitenden Werthe, die also noch  $x, y$  und  $z$  enthalten, und eliminirt alsdann diese Variabeln mit Hilfe der Gleichung 5), so findet man

$$\begin{aligned} 10) \quad \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} &= -2 \frac{1}{\sqrt{abc}} \sqrt{\frac{l_1 l_2}{l_2 - l_1} (a + l_1)(b + l_1)(c + l_1)}, \quad \frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma} = 0, \\ \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} &= 0, \quad \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = -2 \frac{1}{\sqrt{abc}} \sqrt{\frac{l_1 l_2}{l_1 - l_2} (a + l_2)(b + l_2)(c + l_2)}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun noch die Krümmungen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_2$ ,  $r$  und  $\varrho$  durch  $l_1$  und  $l_2$  darstellen.

Die Gleichungen 3) geben sofort

$$11) \quad \varrho_1 = l_1 \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\sqrt{abc}}, \quad \varrho_2 = l_2 \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\sqrt{abc}}.$$

Ferner ist

$$r = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \left( \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} \right) = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta},$$

$$\varrho = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Wir finden also weiter

$$12) \quad r = \frac{1}{2} \frac{l_2}{l_1} \frac{1}{l_2 - l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}, \quad \varrho = \frac{1}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{1}{l_1 - l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun dazu über, die eigentlich gesuchten Werthe von  $G$ ,  $H$ ,  $M$ ,  $U$ ,  $V$  und  $k$  zu bestimmen, indem wir den in § 2 angegebenen Weg einschlagen, nur mit der Modification, dass wir jetzt  $l_1$  und  $l_2$  als Variable benützen anstatt der in § 2 benützten  $x$  und  $y$ .

Als diejenige Bedingung, aus der wir  $G$  zu ermitteln haben, nehmen wir an, dass  $\Delta_2(\beta) = 0$  sein soll. Dann ergibt sich aus der ersten der Relationen L)

$$\frac{\partial l k}{\partial n_\beta} = -2r.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach  $\partial n_\alpha$ , indem wir beachten, dass  $lk$  von  $\alpha$  unabhängig ist, dass also auch  $\frac{\partial l k}{\partial n_\alpha} = 0$ , so erhalten wir mit Hilfe von 3) und 7), § 1

$$-2r\varrho_1 = -2\varrho_2(r - G).$$

Hieraus folgt aber

$$13) \quad G = r \cdot \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\partial l \varrho_2}{\partial n_\beta} = \frac{\partial l \varrho_2}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} = \frac{1}{2l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}.$$

Die Function  $H$  bestimmen wir aus 9), § 1, indem wir im jetzigen Falle haben

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial l \sigma}{\partial n_\beta} \right) + r \frac{\partial l \sigma}{\partial n_\gamma} = \left( \frac{1}{l_1 + l_2} - \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial l \sigma}{\partial n_\gamma} \frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta} = \frac{1}{l_1 + l_2} \left( \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2l_2} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial l \sigma}{\partial n_\beta} \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{l_1 + l_2} \left( \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2l_1} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Die rechte Seite der Gleichung 9), § 1 wird also im vorliegenden Falle

$$\frac{25}{4} \cdot \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Weiter finden wir

$$G - \frac{\partial l_\sigma}{\partial n_\beta} - \frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial n_\beta}}{\sigma} = -\frac{5}{2} \frac{1}{l_1 + l_2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}, \quad \frac{\partial l_\sigma}{\partial n_\gamma} + \frac{\frac{\partial \varrho_2}{\partial n_\gamma}}{\sigma} = \frac{5}{2} \left( \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2l_2} \right) \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Die Gleichung 9), § 1 wird also jetzt

$$\left( -\frac{5}{2} \frac{1}{l_1 + l_2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \right) \left( H - \frac{5}{2} \left[ \frac{1}{l_1 + l_2} + \frac{1}{2l_2} \right] \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} \right) = \frac{25}{4} \frac{1}{(l_1 + l_2)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma};$$

hieraus erhalten wir

$$14) \quad H = \frac{1}{2l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Aus 13) und 14) folgt nun

$$\frac{\partial lM}{\partial n_\beta} = \frac{1}{2l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}, \quad \frac{\partial lM}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{2l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}$$

oder, da wir auch  $lM$  als Function von  $l_1$  und  $l_2$  zu betrachten haben,

$$\frac{\partial lM}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} + \frac{\partial lM}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\beta} = \frac{1}{2l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta}, \quad \frac{\partial lM}{\partial l_1} \frac{\partial l_1}{\partial n_\gamma} + \frac{\partial lM}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{2l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Hieraus wird aber mit Hilfe der Gleichungen 10)

$$\frac{\partial lM}{\partial l_1} = \frac{1}{2l_1}, \quad \frac{\partial lM}{\partial l_2} = \frac{1}{2l_2}.$$

Hieraus ergibt sich schliesslich

$$15) \quad M = A \sqrt{l_1 l_2} = \frac{A \sqrt{abc}}{\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2}},$$

wenn  $lA$  die Integrationsconstante bezeichnet.

Die Gleichungen 10), § 1 werden im vorliegenden Falle, da

$$(G-r)(H-\varrho) = -\frac{1}{4(l_2-l_1)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial r}{\partial n_\gamma} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(l_2-l_1)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial n_\beta} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(l_1-l_2)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$r\varrho = -\frac{1}{4} \frac{1}{(l_2-l_1)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$16) \quad \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial lk}{\partial n_\gamma} \right) - r \frac{\partial lk}{\partial n_\gamma} = \frac{1}{(l_2-l_1)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_\gamma} \left( \frac{\partial lk}{\partial n_\beta} \right) - \varrho \frac{\partial lk}{\partial n_\beta} = \frac{1}{(l_2-l_1)^2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}.$$

Von diesen Gleichungen 16) haben wir blos die erste zu benützen, da wir bereits wissen, dass

$$\frac{\partial lk}{\partial n_\beta} = -2r.$$

Da wir nun aber auch  $\frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$  als Function von  $l_1$  und  $l_2$  zu betrachten haben, so können wir mit Hilfe der Gleichungen 10) und der Relation C) die linke Seite der ersten der Gleichungen 16) weiter umformen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} \right) - r \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} &= \frac{\partial}{\partial n_\beta} \left( \frac{\partial l k}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} \right) - r \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} \frac{\partial l k}{\partial l_2} \\ &= \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} \frac{\partial}{\partial l_1} \left( \frac{\partial l k}{\partial l_2} \right) \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} + \frac{\partial l k}{\partial l_2} r \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} - r \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} \frac{\partial l k}{\partial l_2} \\ &= \frac{\partial^2 l k}{\partial l_1 \partial l_2} \frac{\partial l_1}{\partial n_\beta} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}. \end{aligned}$$

Die erste der Gleichungen 16) giebt daher

$$17) \quad \frac{\partial^2 l k}{\partial l_1 \partial l_2} = \frac{1}{(l_2 - l_1)^2}.$$

Wir erhalten hieraus durch Integration

$$\frac{\partial l k}{\partial l_2} = \frac{1}{l_2 - l_1} + L_2,$$

wenn  $L_2$  eine Function von  $l_2$  bezeichnet, die wir willkürlich annehmen können.

Wir wollen  $L_2 = -\frac{1}{l_2}$  setzen, so dass entsteht

$$\frac{\partial l k}{\partial l_2} = \frac{1}{l_2 - l_1} - \frac{1}{l_2} = -\frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{l_1 - l_2}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $\frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma}$  und beachten, dass  $\frac{\partial l k}{\partial l_2} \frac{\partial l_2}{\partial n_\gamma} = \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma}$  und die Gleichungen 12), so entsteht auch

$$18) \quad \frac{\partial l k}{\partial n_\gamma} = -2\varrho.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den Relationen L), so ergibt sich noch, dass auch  $\mathcal{A}_2(\gamma) = 0$ .

Aus den Gleichungen 30), § 2 folgt weiter für den jetzigen Fall

$$19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial l U}{\partial n_\beta} &= G + r, & \frac{\partial l U}{\partial n_\gamma} &= \varrho, \\ \frac{\partial l V}{\partial n_\beta} &= r, & \frac{\partial l V}{\partial n_\gamma} &= H + \varrho. \end{aligned}$$

Da auch  $lU$  und  $lV$  nur Functionen von  $l_1$  und  $l_2$  sein können, so folgt aus diesen Gleichungen 19) sofort weiter

$$20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial l U}{\partial l_1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{l_1} + l_2 \frac{1}{l_1(l_2 - l_1)} \right), & \frac{\partial l U}{\partial l_2} &= \frac{1}{2} l_1 \cdot \frac{1}{l_2(l_1 - l_2)}, \\ \frac{\partial l V}{\partial l_1} &= \frac{1}{2} l_2 \frac{1}{l_1(l_2 - l_1)}, & \frac{\partial l V}{\partial l_2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{l_2} + l_1 \cdot \frac{1}{l_2(l_1 - l_2)} \right). \end{aligned}$$

Hieraus finden wir

$$21) \quad U = A_1 \cdot \frac{l_1 \sqrt{l_2}}{\sqrt{l_2 - l_1}}, \quad V = A_2 \frac{l_2 \sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2 - l_1}},$$

wenn  $lA_1$  und  $lA_2$  die Integrationsconstanten bezeichnen.

Endlich ergibt sich noch aus  $M = k U \cdot V$

$$A \sqrt{l_1 l_2} = k \cdot A_1 A_2 \cdot \frac{l_1 l_2 \sqrt{l_1 l_2}}{(l_2 - l_1)},$$

$$22) \quad k = \frac{A}{A_1 A_2} \cdot \frac{l_2 - l_1}{l_1 l_2}.$$

Hiermit sind die Werthe gewonnen, die nun, wie in Pg. gezeigt wurde, der Lösung des ganzen vorliegenden Problems zu Grunde gelegt werden müssen.









$$\alpha = 1.5195. \quad \beta = 1.5216. \quad \gamma = 1.5253.$$

Die grösste Axe der ellipsoidischen Welle weicht am oberen Ende des Krystallstückchens von der 1. 4" nach vorn von der krystallographischen Hauptaxe ab: sie ist die Axe der kleinsten Elasticität. Die Axe der grössten Elasticität steht senkrecht zur vollkommensten Spaltungsebene, sie ist zugleich die Axe der Symmetrie.

Aus den drei Hauptbrechungscoefficienten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  berechnet sich nun der Winkel, welchen die optischen Axen mit der Axe der kleinsten Elasticität einschliessen, nach der Formel

$$\cos \zeta = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2},$$

wo  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1.5195$ ,  $\gamma = 1.5253$  zu setzen ist. Demnach ist

$$\cos \zeta = \frac{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 1} = \frac{1.5253^2 - 1}{1.5195^2 - 1} = 0.5545.$$

woraus man erhält  $\zeta = 30^\circ 47' 30''$ . Die kleinste Axe der Elasticität ist also hier die erste Mittellinie, der Gyps optisch-positiv und der Winkel der optischen Axen gleich  $61^\circ 35'$ . Die eine der beiden optischen Axen steht nahezu senkrecht zur zweiten Structurfläche mit einer Neigung von  $52^\circ 23'$ , die zweite optische Axe nahezu senkrecht zur dritten Structurfläche mit einer Neigung von ebenfalls  $52^\circ 23'$ . Der Winkel der optischen Axen bildet demnach mit dem Winkel der vorderen und hinteren Endanschärfungskante genau einen Winkel von  $180^\circ$  und die kleinste Elasticitätsaxe halbirt jenen Winkel nahezu.

Der Winkel der secundären optischen Axen oder der optischen Axen der Strahlen mit der Axe der kleinsten Elasticität ist gemäss der Gleichung

$$\cos \zeta' = \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2}{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

oder

$$\cos \zeta' = \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2}{1 - \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2} = 0.549.$$

Daraus findet man  $\zeta' = 30^\circ 41' 10''$  und den Winkel  $2\zeta'$ , den die beiden secundären Axen mit einander bilden, gleich  $61^\circ 22' 20''$ . Aus dem Umstande, dass der mittlere Brechungscoefficient  $\beta$  constant ist, folgt noch, die Ebene der optischen Axen mit der Symmetrieebene coincidirt. Ferner ist  $\alpha = 1.52056$ ,  $\beta = 1.52267$ ,  $\gamma = 1.52975$ , woraus folgt  $180^\circ$ . (Pogg. Ann. Bd. 86, S. 206—234.)



und hier lehrt eine bloße cyklische Buchstabenvertauschung, dass dieser Satz das Drittheil eines umfassenderen Satzes ausmacht, wonach ferner

die Mittelpunkte von  $CA, BR, WU$   
und „ „ „ „  $AB, CR, UV$

in geraden Linien liegen müssen. Diese drei Geraden verbinden die Mitten der Gegenseiten und der Diagonalen des einfachen Vierecks  $CARR$  und schneiden sich daher in einem Punkte  $O$ .

Dieser Satz lässt sich wieder durch perspectivische Projection verallgemeinern. Beachtet man nämlich, dass Anfang, Mitte und Ende einer Strecke mit dem unendlich entfernten Punkte derselben Geraden ein System harmonischer Punkte bilden und dass die Projection einer harmonisch getheilten Geraden wiederum harmonisch getheilt ist, so erhält man folgenden Satz, worin der Durchschnitt zweier Geraden  $PQ$  und  $s$  mit  $P'$  bezeichnet ist: Lie in der vorigen Figur enthaltenen Geraden  $CA, BR, WU, CR, UV, AB$  seien bis zu ihren Durchschnitten mit einer beliebig gewählten Geraden  $s$  verlängert, dann liegen  $PQ, P', CA, BR, WU, CR, UV, AB$  in einer Geraden die vierten harmonischen Punkte

zu  $P, Q, P'$  :  $A, B, C$  ; zu  $P, Q, P'$  :  $R, S, T$  ;  
zu  $P, Q, P'$  :  $U, V, W$  ; zu  $P, Q, P'$  :  $X, Y, Z$  ;  
zu  $P, Q, P'$  :  $A, B, C$  ; zu  $P, Q, P'$  :  $R, S, T$  ;  
zu  $P, Q, P'$  :  $U, V, W$  ; zu  $P, Q, P'$  :  $X, Y, Z$  ;

denn die Geraden schneiden sich in einem Punkte.

Die Figur enthält nur außer den festen Punkten  $A, B, C$  einen beweglichen Punkt  $P$  und eine willkürliche Gerade  $s$ ; es liegt daher nahe, die Harmonie zwischen irgendwelche Bewegungen zu erhalten, z. B. bei Ueberschiebung des Punktes  $P$  auf einem Kreisbogen herumzuführen, oder die Geraden  $s$  die Harmonie eines Kreisbogens umhüllen zu lassen. Wie weit man die den vorigen beschriebenen Geraden und ihr Durchschnittspunkt verschieben, veranlasst wohl eine nähere Untersuchung.

Es kann schon ohne dass man sich um die reciproke Satz annehmen muss, als Durchschnitt zweier Geraden  $p$  und  $q$  mit  $P$ , und die Harmonie zwischen dem Punkte  $P$  und einem andern Punkte  $S$  mit  $P'$  bezeichnet werden. Der beschriebene Satz lautet: Die Seiten  $CA, BR, WU, CR, UV, AB$  seien beliebig verlängert, von einer beliebigen Geraden  $s$  aus den Punkten  $A, B, C, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$  geschnitten und diese Schnitte mit dem gegenwärtigen Durchschnittspunkt  $P$  der Geraden  $p$  und  $q$  verbunden, welche  $a, b, c, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  heißen mögen; wird nun noch ein willkürlicher Punkt  $P'$  angenommen, so schneiden sich  $P, P', a, b, c, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  in einem Punkte.









**Cartesische Punktoordin. (Fig. 15.)**

1. Das System besteht aus zwei Geraden  $(x, y)$ , die durch einen Punkt  $(O)$  gehen.
2. Zwei auf den Axen  $x$  und  $y$  liegende Punkte  $A$  und  $B$  (die unendlich fernen Punkte) liegen auf der unendlich fernen Geraden.
3. Um die Coordinaten eines Punktes  $P$  zu finden, verbindet man diesen Punkt mit den beiden unendlich fernen Punkten  $A$  und  $B$  (d. h. zieht durch  $P$  Parallelen zu den Axen) durch die Linien  $x_1$  und  $y_1$ .

Diese Reciprocität der Ausdehnungsgebilde (Punkt und Gerade) wird vervollständigt durch diejenige der Zahlgrößen (Entfernungen). Es entsprechen sich nämlich:

4. die Coordinaten des Punktes  $P$ , d. h. die Abstände der Geraden  $x$  und  $x_1$ , sowie  $y$  und  $y_1$ ;
5. der Abstand der unendlich fernen Punkte  $A$  und  $B$ , d. h. der Winkel der Geraden  $x$  und  $y$ .

Zu Nr. 5 ist zu bemerken, dass die unendlich fernen Punkte  $A$  und  $B$  gleichbedeutend sind mit Strecken auf den zugehörigen Geraden (vergl. mein „System der Raumlehre“ Th. II, Nr. 2 und 3), dass also der Abstand zweier unendlich fernen Punkte durch den Winkel dieser Strecken oder den der zugehörigen Geraden gemessen wird.

Waren, April 1877.

**Schwering'sche Liniencoordin. (Fig. 16.)**

1. Das System besteht aus zwei Punkten  $(X, Y)$ , die durch eine Gerade  $(o)$  verbunden sind.
2. Zwei durch die Anfangspunkte  $X$  und  $Y$  gehende Geraden  $a$  und  $b$  (die parallelen Axen) schneiden sich in einem unendlich fernen Punkte.
3. Um die Coordinaten einer Geraden  $p$  zu finden, bestimmt man die Schnittpunkte  $X_1$  und  $Y_1$  dieser Geraden mit den Parallelen  $a$  und  $b$ .

4. die Coordinaten der Geraden  $p$ , d. h. die Abstände der Punkte  $X$  und  $X_1$ , sowie  $Y$  und  $Y_1$ ;
5. der Abstand der Geraden  $a$  und  $b$ , d. h. der Abstand der Punkte  $X$  und  $Y$ .

V. SCHLEGEL







wird. Dies war vorherzusehen, da, wie man weiss, in einem Leiter die Energie der elektrischen Bewegungen immer theilweise in Wärme umgesetzt wird.

Wirklich sind alle metallischen Leiter sehr wenig durchsichtig, und sind die meisten Körper, welche das Licht ungeschwächt durchlassen, Isolatoren. Eine Ausnahme bilden die Elektrolyte, deren viele fast vollkommen durchsichtig sind, und welche jedenfalls viel mehr Licht durchlassen, als es nach obigen Gleichungen der Fall sein müsste. Auch für die Metalle scheint dies zu gelten; wenigstens hat Maxwell, der zuerst auf den Zusammenhang zwischen Leitungsfähigkeit und Undurchsichtigkeit aufmerksam machte, die Durchsichtigkeit eines dünnen Goldblättchens viel grösser gefunden, als man es nach der Theorie erwarten dürfte.\*

Ohne Zweifel liegt der Grund dieser Abweichungen in der Mangelhaftigkeit unserer Anschauungen über das Wesen des elektrischen Stromes. Nur wenn die Wissenschaft in dieser Beziehung viel weiter fortgeschritten ist, darf man auf eine völlig befriedigende Uebereinstimmung der Theorie mit den Thatsachen hoffen. Indess lässt sich wenigstens ein Umstand angeben, der vielleicht als die Ursache der erwähnten Abweichungen zu betrachten ist.

Das Ohm'sche Gesetz, dessen allgemeine Giltigkeit wir oben voraussetzten, ist nur für stationäre Ströme mit voller Gewissheit bewiesen. Für veränderliche Ströme aber ist es sehr gut möglich, dass dieses Gesetz einer Modification bedarf, wie dies denn auch bereits von Weber, Kirchhoff und Lorberg angenommen worden ist.

Es ist nämlich nicht unwahrscheinlich, dass bei dem Auftreten einer elektromotorischen Kraft der elektrische Strom nicht unmittelbar entsteht mit der vollen, durch das Ohm'sche Gesetz bedingten Intensität, sondern eine gewisse Zeit braucht, um bis zu dieser Intensität anzuschwellen.\*\* Diese Zeit mag sehr kurz sein, so dass für unsere Beobachtungsmittel die Intensität augenblicklich ihren grössten Werth zu erreichen scheint; dennoch ist es möglich, dass bei raschen periodischen Aenderungen der elektromotorischen Kraft, wie bei den Lichterscheinungen, der erwähnte Zeitraum nicht mehr verschwindet gegen die Zeit, während welcher diese Kraft in der nämlichen Richtung wirkt. Dies wird zur Folge haben, dass die Stromintensität in jedem Augenblick kleiner ist, als sie nach dem Ohm'schen Gesetze sein müsste; die Bewegung wird also etwa so vor sich gehen, als wäre der Widerstand für rasch oscillirende Ströme grösser als für stationäre. Dann muss aber, wie man

\* *Maxwell, Electricity and Magnetism*, §§ 798 — 800.

\*\* Dieses Anschwellen ist wohl zu unterscheiden von der beobachteten Erscheinung, dass beim Schliessen einer galvanischen Kette in einem Punkte des Schliessungsbogens die elektromotorische Kraft und dadurch der Strom eine *raucht, um in voller Stärke aufzutreten.*



wobei  $\psi$  wieder die nämliche Function ist, wie in den vorhergehende Formeln.

Die hier angegebenen Werthe genügen den Bewegungsgleichungen für jeden Werth des Winkels  $\alpha$  und sogar auch, wenn  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  complexe Grössen sind.

§ 6. Es müssen weiter die Bedingungen gesucht werden, welche an der Grenze von einem isotropen Nichtleiter und einem Metalle gelten. Es sind dies die Gleichungen A), B), 8) und 24) der ersten Mittheilung; nur sind diese noch etwas zu vereinfachen. Es möge dabei wieder angenommen werden, dass die Grenzfläche mit der  $yz$ -Ebene des Coordinatensystems zusammenfalle; ausserdem sei der Isolator das erste, der Leiter das zweite Medium, so dass die Accente bei denjenigen Grössen, welche für beide mit denselben Buchstaben bezeichnet sind, sich auf das Metall beziehen.

Es werden dann die Gleichungen A) und B)

$$9) \quad \frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \kappa u_1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)',$$

$$10) \quad \frac{\eta}{\varepsilon} = \kappa v_1, \quad \frac{\zeta}{\varepsilon} = \kappa w_1,$$

$$11) \quad L + \frac{\partial \chi}{\partial x} = L' + \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)',$$

$$12) \quad M = M', \quad N = N'.$$

In der Formel 8) der ersten Mittheilung ist für  $u$ ,  $v$ ,  $w$  zu setzen  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ , für  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  dagegen nach 5)  $u_1 + \varepsilon' \kappa \frac{\partial u_1}{\partial t}$ ,  $v_1 + \varepsilon' \kappa \frac{\partial v_1}{\partial t}$ ,  $w_1 + \varepsilon' \kappa \frac{\partial w_1}{\partial t}$ . Es folgt mithin

$$13) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = u_1 + \varepsilon' \kappa \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)'.$$

Endlich giebt 24)

$$14) \quad \vartheta L - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \chi}{\partial x} = \vartheta' L' - \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial \chi}{\partial x} \right)'.$$

Es lässt sich nun aus 11) und 14)  $\chi$  wegschaffen; setzen wir auch hier  $(1 + 4\pi\vartheta') : (1 + 4\pi\vartheta) = 1$ , was nur bei den magnetischen Metallen einen erheblichen Fehler verursacht, so ergibt sich

$$15) \quad L = L'.$$

Wenn man 9) nach  $t$  differenzirt, kann man aus dieser Gleichung mittelst 13)  $\varphi$  eliminiren; man erhält dadurch

$$16) \quad \left( 1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_1 + \varepsilon' \kappa \left( 1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon'} \right) \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

welche Gleichung man statt 9) nehmen kann.

Für den Isolator können wir nun, wie früher,  $\frac{1}{\varepsilon}$  gegen die Einheit vernachlässigen; man darf somit im ersten Gliede von 16) die Grösse  $\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial \xi}{\partial t}$  fortlassen. Ueber die Zahl  $\varepsilon'$  wissen wir vorläufig Nichts; indess ist es leicht zu zeigen, dass im zweiten Gliede der Gleichung die Grösse  $\frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial u_1}{\partial t}$  so klein ist gegen  $u_1$ , dass sie vernachlässigt werden darf. Denn nach 2) lässt sich diese Grösse auch so schreiben:

$$17) \quad \frac{1}{1 + 4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\kappa'}{4\pi} \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und wenn man nun berücksichtigt, dass bei den Lichterscheinungen  $[u_1]$  durch eine Exponentialgrösse, wie im vorhergehenden Paragraphen, dargestellt wird, findet man aus den Werthen von  $\kappa'$  und  $T$  leicht, dass bei den Metallen bereits  $\frac{\kappa'}{4\pi} \frac{\partial u_1}{\partial t}$  sehr klein gegen  $u_1$  ist. Um so mehr ist dies mit dem Ausdrucke 17) der Fall, da noch  $\varepsilon_0$  eine sehr grosse Zahl ist.

Die Gleichung 16) gestaltet sich demnach zur folgenden um:

$$18) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_1 + \varepsilon' \kappa \frac{\partial u_1}{\partial t},$$

und die Bedeutung hiervon ist, dass auch an der Grenze keine Anhäufung von Elektrizität entstehen kann.

Es muss dann weiter, wie auch aus 13) folgt,

$$19) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)'$$

sein.

Wir wollen nun zeigen, dass man auch hier den Grenzbedingungen genügen kann, wenn man blos Transversalschwingungen in die Rechnung aufnimmt. Da bei diesen überall  $\varphi = 0$  ist, haben wir nur die Gleichungen 10), 12), 15) und 18) zu berücksichtigen.

§ 7. Ist zunächst das einfallende Licht in der Einfallsebene ( $xz$ -Ebene) polarisirt, so kann man es vorstellen durch die Gleichungen \*

$$[\eta_0] = e^{-i\psi_0}, \quad [L_0] = \frac{4\pi A}{R} \sin \alpha \cdot e^{-i\psi_0}, \quad [N_0] = -\frac{4\pi A}{R} \cos \alpha \cdot e^{-i\psi_0},$$

$$\psi_0 = \frac{2\pi}{T} (t - xR \cos \alpha - zR \sin \alpha + p), \quad R = \frac{1}{v}.$$

Ebenso schreiben wir für das reflectirte Licht

$$[\eta] = a e^{-i\psi}, \quad [L] = \frac{4\pi A}{R} \sin \alpha \cdot a e^{-i\psi}, \quad [N] = \frac{4\pi A}{R} \cos \alpha \cdot a e^{-i\psi},$$

\* Vergl. die



$$\psi = \frac{2\pi}{T} (t + x R \cos \alpha - z R \sin \alpha + p),$$

und für die Bewegung im Metalle (§ 5)

$$[v'] = a' e^{-i\psi'}, \quad [L'] = \frac{\kappa R'}{A(1 + 4\pi\vartheta')} \sin \alpha' \cdot a' e^{-i\psi'},$$

$$[N'] = - \frac{\kappa R'}{A(1 + 4\pi\vartheta')} \cos \alpha' \cdot a' e^{-i\psi'},$$

$$\psi' = \frac{2\pi}{T} (t - x R' \cos \alpha' - z R' \sin \alpha' + p).$$

Es kann nun den Grenzbedingungen genügt werden, wenn

$$20) \quad R \sin \alpha = R' \sin \alpha'$$

ist, welche Gleichung dem Brechungsgesetze bei nichtleitenden Medien entspricht.

Es wird dann nämlich an der Grenzfläche ( $x=0$ )  $\psi_0 = \psi = \psi'$  und man erhält aus der ersten der Gleichungen 10)

$$21) \quad \frac{1+a}{\varepsilon} = \kappa a'.$$

Der Gleichung 18), der zweiten von 10) und der ersten von 12) wird durch die angegebenen Werthe genügt. Die zweite der Formeln 12) liefert aber die Relation

$$\frac{4\pi A}{R} (1-a) \cos \alpha = \frac{\kappa R'}{A(1 + 4\pi\vartheta')} a' \cos \alpha',$$

welche, wenn man sie mit  $A(1 + 4\pi\vartheta) = A'(1 + 4\pi\vartheta')$  multiplicirt, folgende Gestalt annimmt:

$$R \frac{1-a}{\varepsilon} \cos \alpha = R' \kappa a' \cos \alpha'$$

oder nach 20)

$$22) \quad \frac{1-a}{\varepsilon} \sin \alpha' \cos \alpha = \kappa a' \sin \alpha \cos \alpha'.$$

Schliesslich ergibt sich aus 15)

$$\frac{4\pi A}{R} (1+a) \sin \alpha = \frac{\kappa R'}{A(1 + 4\pi\vartheta')} a' \sin \alpha'$$

und dies führt nach einiger Umformung wieder auf 21) zurück. Aus 21) und 22) folgt aber

$$a = - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')}$$

und man hat demnach für das reflectirte Licht

$$A) \quad [\eta] = - \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} e^{-i \frac{2\pi}{T} (t + x R \cos \alpha - z R \sin \alpha + p)}.$$

§ 8. Ist zweitens das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so kann man für die einfallende, reflectirte und durchgelassene Bewegung der Reihe nach setzen



den reellen Theil nimmt, hört die Uebereinstimmung auf; denn bei den Metallen wird  $R'$ , mithin auch  $\alpha'$  complex, während diese Grösse bei Nichtleitern reell ist.

Um nun für die Metallreflexion den reellen Theil von A) und B) zu bestimmen, lässt sich eine Rechnung anwenden, welche Eisenlohr\* bei der Ableitung der von Cauchy für die Metallreflexion angegebenen Gleichungen benützt hat. Eisenlohr erhält nämlich diese Gleichungen, indem er in den Formeln, welche für isolirende Körper gelten, für den Brechungsexponenten eine complexe Grösse  $\vartheta e^{i\tau}$  setzt. Nun ist aber nach der Gleichung 20) in der That das Verhältniss  $\sin \alpha : \sin \alpha'$  eine constante, aber complexe Grösse. Setzen wir dieselbe  $= \sigma e^{i\tau}$ , so werden die Constanten  $\sigma$  und  $\tau$  mit den von Eisenlohr eingeführten Grössen  $\vartheta$  und  $\varepsilon$  übereinstimmen.

Wir haben also

$$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\sigma} e^{-i\tau}$$

und demzufolge

$$\cos \alpha' = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma^2} e^{-2i\tau}} = v e^{i\omega},$$

wobei  $v$  und  $\omega$  leicht aus  $\alpha$ ,  $\sigma$  und  $\tau$  zu berechnen sind.

Durch Substitution der Werthe von  $\sin \alpha'$  und  $\cos \alpha'$  wird nun

$$-\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} = b + b'i, \quad \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha')} = c + c'i,$$

wenn

$$b = \frac{1 - m^2}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2}, \quad b' = -\frac{2m \sin(\tau + \omega)}{1 + 2m \cos(\tau + \omega) + m^2}, \quad m = \frac{\sigma v}{\cos \alpha},$$

$$c = -\frac{1 - m'^2}{1 + 2m' \cos(\tau - \omega) + m'^2}, \quad c' = \frac{2m' \sin(\tau - \omega)}{1 + 2m' \cos(\tau - \omega) + m'^2}, \quad m' = \frac{\sigma \cos \alpha}{v}$$

ist.

Bringt man diese Werthe in A) und B) über, so ergibt sich für den reellen Theil dieser Ausdrücke

$$\eta = \sqrt{b^2 + b'^2} \cos(\psi - d_p), \quad \varrho = \sqrt{c^2 + c'^2} \cos(\psi - d_s),$$

wenn

$$d_p = \operatorname{arctg} \frac{b'}{b}, \quad d_s = \operatorname{arctg} \frac{c'}{c}$$

gesetzt wird.

Eine leichte Rechnung ergibt dann für die Intensität des reflectirten Lichtes, wenn das einfallende Licht in oder senkrecht zu der Einfallsebene polarisirt ist,

$$25) \quad J_p = b^2 + b'^2 = \operatorname{tg}(f - \tfrac{1}{4}\pi), \quad J_s = c^2 + c'^2 = \operatorname{tg}(g - \tfrac{1}{4}\pi),$$

$$26) \quad \cot f = \cos(\tau + \omega) \sin(2 \operatorname{arccot} m), \quad \cot g = \cos(\tau - \omega) \sin(2 \operatorname{arctg} m'),$$

während man zur Bestimmung der Phase folgende Gleichungen hat:

$$27) \quad \operatorname{tg} d_p = \sin(\tau + \omega) \operatorname{tg}(2 \operatorname{arccot} m), \quad \operatorname{tg} d_s = \sin(\tau - \omega) \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} m').$$

\* Pogg. Ann. 104, S. 368.



beiden Spectrallinien gefundenen Werthe hervor. Denn erstens müssten nach der Theorie die beiden Werthe von  $K$  einander gleich sein; zweitens müssten die für  $s$  gefundenen Zahlen sich umgekehrt verhalten wie die Schwingungsdauer, und diese Proportion ergiebt, wenn man für die  $D$ -Linie  $s=25$  setzt, für die  $H$ -Linie  $s=38$ , während wir oben für letztere  $s=29$  erhielten.

Es kann also die Theorie gewiss nicht als endgiltig festgesetzt betrachtet werden. Wir haben denn auch die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze nur besprochen, da aus ihr möglicherweise die Abweichungen, welche wir zwischen der Theorie und der Erfahrung finden, entspringen können. Sehr gut ist es möglich, dass man bei weiterer Untersuchung andere Ursachen für dieselben kennen lernen wird. Jedenfalls wird aber gerade die weitere Erforschung der optischen Eigenschaften der Metalle von Wichtigkeit sein für das bessere Verständniss der elektrischen Erscheinungen.

---



conischer Polaren dieser Punkte in Bezug auf  $(A_1 \dots A_9)\{\kappa^3 \dots\}$ , so erzeugen sie mit dem Büschel  $(Q)$  Curven dritter Ordnung  $Y^3, Z^3, \dots$ , von denen sich zeigen lässt, dass sie ein Büschel bilden, dem auch  $X^3$  angehört. Da die Büschel  $(\xi^2 \dots), (\eta^2 \dots), (\zeta^2 \dots), \dots$  mit dem Büschel  $(Q)$  in projectivischer Beziehung sich befinden, so sind sie selbst unter einander projectivisch und es erzeugen  $(\xi^2 \dots)$  und  $(\eta^2 \dots)$  eine Curve  $C^4$  vierter Ordnung durch die acht Punkte  $X_1 \dots X_4, Y_1 \dots Y_4$ . Diese wird von  $X^3$  in  $X_1 \dots X_4$  geschnitten. Ihre übrigen Schnittpunkte mit  $C^4$  müssen auch auf  $Y^3$  liegen; denn ist  $S$  irgend einer dieser anderen Schnittpunkte, so treffen sich in ihm die homologen Elemente  $\xi_s^2$  und  $Q P_s$ , aber auch  $Q P_s$  und  $\eta_s^2$ . Da aber die Curven  $X^3$  und  $Y^3$  sich ausser in  $Q$  noch in acht Punkten  $S_1 \dots S_8$  auf  $C^4$  schneiden, so müssen durch diese neun Punkte  $Q S_1 \dots S_8$  auch die Curven  $Z^3 \dots$  hindurchgehen, weil  $Z^3$  auch durch die Büschel  $(\xi^2 \dots)$  und  $(\zeta^2 \dots)$  oder  $(\eta^2 \dots)$  und  $(\zeta^2 \dots)$  erzeugt werden kann. Von den Curven des Büschels  $(X^3 Y^3 \dots)$  berühren vier die Gerade  $l$ , also giebt es auf  $x$  vier Punkte, durch die sich nur zwei Tangenten an  $C_3$  ziehen lassen, die daher auf  $C_3$  liegen. Mithin ist  $C_3$  von der vierten Ordnung und hat eine Doppeltangente, die wir  $l$  nennen wollen. Die Punktreihe  $R \dots$ , in welcher diese von den Tangenten von  $C_3$ , d. i. von den geraden Polaren der Punkte  $P \dots$  bezüglich ihrer homologen Curven  $\kappa^3 \dots$  geschnitten wird, ist diesen Tangenten und daher auch der Reihe  $P \dots$  projectivisch. Demnach werden die Geraden  $P R_1 \dots$  von einem Kegelschnitte  $[l_1 l]$  eingehüllt, der mit  $C_3$  ausser  $l$  noch vier gemeinschaftliche Tangenten hat. Sie seien  $l_1 \dots l_4$  und treffen  $l$  in ihren homologen Punkten  $P_1 \dots P_4$ . Wenn aber die gerade Polare eines Punktes durch ihn hindurchgeht, so muss er auf der Curve liegen; daher liegen  $P_1 \dots P_4$  auf ihren homologen Curven  $\kappa_1^3 \dots \kappa_4^3$ . Auf einer beliebigen Geraden giebt es daher vier Punkte, in denen sich homologe Elemente von  $(\kappa^3 \dots)$  und  $(M)$  treffen, also erzeugen diese Büschel eine Curve vierter Ordnung. — Dass dieselbe durch die Grundpunkte geht, folgt auf bekannte Art.

Anderer Beweis. Durch drei feste Punkte  $B_1 B_2 B_3$  und die Schnittpunkte  $\mathfrak{A} \mathfrak{A}' \mathfrak{A}''$ ,  $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{A}''_1, \dots$  von  $\kappa^3, \kappa_1^3, \dots$  mit einer Geraden  $l$  lege man Curven dritter Ordnung  $\beta^3, \beta_1^3, \dots$ , welche  $M$  zum gemeinsamen Doppelpunkt haben. Dieselben bilden ein Büschel, dessen Grundpunkte ausser  $M B_1 B_2 B_3$  noch  $B_4 B_5$  sein mögen. Aus  $M$  und  $B_1$  werden  $\beta^3, \beta_1^3, \dots$  durch ein-zweigligdrige,  $l$  wird durch zwei projectivische Strahlenbüschel in perspectivischer Lage projecirt. Dreht man alle Büschel um  $M$  und  $B_1$  so, dass  $M B_2$  und  $B_1 B_2$  in eine Gerade fallen, so gehen alle Curven  $\beta^3, \beta_1^3, \dots$  in Kegelschnitte  $\beta^2, \beta_1^2, \dots$  eines Büschels mit vier Grundpunkten  $M \mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4 \mathfrak{B}_5$  über; aus  $l$  wird ein Kegelschnitt  $\lambda^2$ , der durch  $M$  geht; die Strahlen  $g g_1 \dots$  bilden ein neues Strahlenbüschel um  $M$  in anderer Lage. Die Strahlen desselben schneiden die homologen





legen wir eine Curve dritter Ordnung  $K^3$ , die wir uns auch durch ein Strahlenbüschel und ein projectivisches Kegelschnittbüschel erzeugt denken wollen. Dieselbe können wir dann auch erzeugen durch das Kegelschnittbüschel  $(A_6 \dots A_9)$  und ein projectivisches Strahlenbüschel  $(K)$ , dessen Scheitel  $K$  auch auf  $A_4 A_5$  liegen muss. Dieses Strahlenbüschel ist auch in perspectivischer Lage mit allen Büscheln  $(B)$ ,  $(B_1)$ , ... und erzeugt mit ihnen die Geraden  $ss_1 \dots$ , auf denen in je drei Punkten  $K^3$  von  $\kappa^3 \kappa_1^3 \dots$  geschnitten wird. Es möge nun  $g$  von  $s$  in  $G$  geschnitten werden, so sind  $BG$  und  $KG$  homologe Strahlen der Büschel  $(B)$  und  $(K)$ . Da aber auch  $BG$ ,  $B_1G$ , ... homologe Strahlen der Büschel  $(B)$ ,  $(B_1)$ , ... sind, so sind auch  $B_1G$ , ... und  $KG$  homologe Strahlen und daher schneiden sich  $ss_1 \dots$  in  $G$ .

**22. Haben zwei projectivische Büschel von Curven dritter Ordnung sechs Grundpunkte, die auf einem Kegelschnitte  $\mathfrak{K}^2$  liegen, gemeinsam, und entsprechen dabei die Curven einander, von denen  $\mathfrak{K}^2$  ein Bestandtheil ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Curven auf einer Curve vierter Ordnung.**

Es seien  $ABCDEF$  die sechs gemeinschaftlichen Grundpunkte der projectivischen Büschel  $(C^3 C_1^3 \dots)$  und  $(K^3 K_1^3 \dots)$  und liegen auf einem Kegelschnitte  $\mathfrak{K}^2$ , dann liegen die übrigen drei Grundpunkte  $C' C'' C'''$  und  $K' K' K''$  je auf einer Geraden  $c$  und  $k$ . Jede der Curven des ersten Büschels wird von allen Curven des zweiten Büschels in solchen Geraden geschnitten, dass sie sämmtlich sich in Punkten  $\mathfrak{U} \mathfrak{U}_1 \dots$  von  $k$  schneiden, und jede der Curven des zweiten Büschels wird von allen des ersten in solchen Geraden geschnitten, die sich sämmtlich in Punkten  $\mathfrak{B} \mathfrak{B}_1 \dots$  von  $c$  treffen. Die Geraden  $\mathfrak{U} \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{B}_1$ , ... sind also die Schnittlinien von  $K^3$  und  $C^3$ ,  $K_1^3$  und  $C_1^3$ , ...; die Punkte  $\mathfrak{U} \mathfrak{U}_1$  sind projectivisch auf  $\mathfrak{B} \mathfrak{B}_1 \dots$  bezogen und liegen perspectivisch, daher schneiden sich diese Geraden in einem Punkte  $P$ . Wir können jeder dieser Geraden die Curven zuordnen, die sich auf ihr schneiden, und erhalten dadurch zwischen den Strahlen von  $(P)$  und den Curven eines jeden der Büschel  $(C^3 \dots)$  und  $(K^3 \dots)$  projectivische Beziehungen. Da aber das Strahlenbüschel  $(P)$  mit jedem der projectivischen Curvenbüschel dieselbe Curve vierter Ordnung erzeugt, so erzeugen auch die projectivischen Curvenbüschel dieselbe Curve vierter Ordnung, eigentlich eine Curve sechster Ordnung, die aber aus dieser Curve vierter Ordnung und dem Kegelschnitt  $\mathfrak{K}^2$  besteht.

**23. Wenn eine Curve  $K^4$  der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente eines Büschels erster Ordnung  $M(g_0 g_1 g_2 \dots)$  und eines projectivischen Büschels dritter Ordnung  $(A_4 \dots A_9) \{ \kappa_0^3 \kappa_1^3 \kappa_2^3 \dots \}$  ist, von dessen Grundpunkten sechs in einem Kegelschnitte  $\mathfrak{K}^2$  liegen, so treffen alle Curven vierter Ordnung, welche durch diese sechs Punkte**



übrigen Schnittpunkte auf geraden Linien, die sich in einem Punkte treffen.

Die projectivischen Curvenbüschel seien  $(A_1 A_2 \dots A_9) \{\alpha^3 \alpha_1^3 \dots\}$  und  $(B_1 B_2 \dots B_9) \{\beta^3 \beta_1^3 \dots\}$ ; je zwei homologe Curven schneiden sich in sechs Punkten  $C D E F G H$ ,  $C_1 D_1 E_1 F_1 G_1 H_1$ , ... auf einem Kegelschnitt  $\mathcal{R}^2$  und ausserdem in je drei Punkten  $J K L$ ,  $J_1 K_1 L_1$ , ..., die auf geraden Linien  $g$ ,  $g_1$ , ... liegen. Es lässt sich zeigen, dass alle diese Geraden sich in einem Punkte schneiden. Zunächst weisen wir nach, dass keine zwei von ihnen sich in einem Punkte von  $\mathcal{R}^2$  schneiden können; denn thäten dies irgend zwei von ihnen, etwa  $g_m$  und  $g_n$ , und läge ihr Schnittpunkt  $O$  auf  $\mathcal{R}^2$ , so bildeten sowohl  $\alpha_m^3$  und  $\beta_m^3$ , als  $\alpha_n^3$  und  $\beta_n^3$  neue Curvenbüschel, zu denen  $(\mathcal{R}^2, g_m)$  und  $(\mathcal{R}^2, g_n)$  gehörten. Die geraden Polaren von  $O$  bezüglich der Curven der Büschel  $(\alpha^3 \dots)$  und  $(\beta^3 \dots)$  schneiden sich in zwei Punkten  $A$  und  $B$  und da  $O$  ein Doppelpunkt einer Curve sowohl im Büschel  $(\alpha_m^3 \beta_m^3)$  als  $(\alpha_n^3 \beta_n^3)$  ist, so muss seine gerade Polare für alle Curven beider Büschel mit  $AB$  zusammenfallen und  $O$  müsste auch ein Doppelpunkt einer Curve sowohl des Büschels  $(\alpha^3 \dots)$  als  $(\beta^3 \dots)$  sein, was nicht vorausgesetzt ist. Daher können sich in keinem Punkte von  $\mathcal{R}^2$  zwei der Geraden  $g g_1 \dots$  schneiden und sie müssen  $\mathcal{R}^2$  in Punktpaaren  $M N$ ,  $M_1 N_1$ , ... schneiden, welche in projectivischer Beziehung zu den Curven  $\alpha^3 \alpha_1^3 \dots$  und  $\beta^3 \beta_1^3 \dots$  stehen. Denn erstlich entspricht jedem Paare homologer Curven  $(\alpha^3 \beta^3)$  ein Punktpaar  $M N$  und umgekehrt. Ja, es entspricht sogar jedem Punkte dieses Paares dasselbe Curvenpaar  $(\alpha^3 \beta^3)$ , weil es z. B. durch  $M$  nur eine einzige Gerade geben kann, auf der sich homologe Curven schneiden. Da also

$$(\alpha^3 \alpha_1^3 \dots) \overline{\wedge} (M M_1 \dots) \overline{\wedge} (N N_1 \dots)$$

ist, so muss auch

$$(M M_1 \dots N N_1 \dots) \overline{\wedge} (N N_1 \dots M M_1 \dots)$$

sein und es haben diese Punktreihen involutorische Lage, woraus weiter folgt, dass alle Geraden  $g g_1 \dots$  sich in einem Punkte  $P$  schneiden; da ferner

$$(\alpha^3 \alpha_1^3 \dots) \overline{\wedge} (\beta^3 \beta_1^3 \dots) \overline{\wedge} P(g g_1 \dots)$$

ist, so liegen die Schnittpunkte homologer Elemente auf einer Curve vierter Ordnung  $K^4$ , welche durch  $A_1 \dots A_9 B_1 \dots B_9 P$  geht.

25. Eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung, welche der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente zweier Büschel erster und dritter Ordnung ist, kann auf unzählige Arten durch zwei solche Büschel erzeugt werden.

Es sei  $K^4$  der Ort der Schnittpunkte homologer Elemente der Büschel  $S(s_0 s_1 s_2 \dots)$  und  $(A_1 \dots A_9) \{\kappa_0^3 \kappa_1^3 \kappa_2^3 \dots\}$ . Die homologen Elemente  $s_p$  und  $\kappa_p^3$  schneiden sich in  $B_p C_p D_p$ . Ein beliebiger Kegelschnitt  $P^2$  treffe  $\kappa_p^3$  in  $P_1 \dots P_6$ . Durch die neun Punkte  $B_p C_p D_p P_1 \dots P_6$  sei  $X^3$  eine beliebige Curve dritter Ordnung. Diese wird von  $\kappa_0^3 \kappa_1^3 \kappa_2^3 \dots$  in



$\kappa$  aus  $(K_{20}K_{01})$  und beziehen  $(K_0K_2)$  und  $(K_0K_1)$  projectivisch auf einander, indem wir  $K_0$  sich selbst,  $K_{01}$  und  $K_{20}$ , und zwei Curven einander entsprechen lassen, welche sich in einem Punkte von  $\kappa$  schneiden, so erzeugen diese eine Curve dritter Ordnung, welche mit  $\kappa$  zehn gemeinschaftliche Punkte hat und also mit ihr zusammenfällt. Wenn  $K_2$  und  $\kappa$  sich in  $P$  schneiden und es ist  $K_{01}^{(p)}$  diejenige Curve von  $(K_0K_1)$ , welche durch  $P$  geht, so folgt, dass  $\kappa$  auch eine Curve des Büschels  $(K_2K_{01}^{(p)})$  ist. Dieses Büschel erhalten wir aber auch aus den Büscheln  $(K_0K_1)$  und  $(K_1K_2)$ , in denen wir die projectivische Beziehung nur so feststellen dürfen, dass  $K_1$  sich selbst,  $K_{01}^{(p)}$  der Curve  $K_2$  entspricht. Somit erhalten wir alle Curven des Netzes  $[K_0K_1K_2]$ , wenn wir alle Curven der Büschel uns vorstellen, welche eine veränderliche Curve  $K_{01}^{(p)}$  des Büschels  $(K_0K_1)$  mit einer veränderlichen  $K_{12}^{(q)}$  des Büschels  $(K_1K_2)$  oder jede dieser veränderlichen Curven mit einer veränderlichen  $K_{20}^{(r)}$  des Büschels  $(K_2K_0)$  bestimmt. Daraus aber folgt:

Je zwei Büschel des Netzes haben eine Curve gemein.

Man leitet aus diesem Satze leicht einige Haupteigenschaften des Netzes ab, so:

- a) Alle Curven des Netzes, welche durch einen Punkt gehen, bilden ein Büschel.
- b) Schneiden Curven eines Büschels dritter Ordnung eine beliebige Curve dritter Ordnung und man legt durch die einzelnen Gruppen von Schnittpunkten und einen beliebigen Punkt andere Curven dritter Ordnung, so bilden auch diese ein Büschel.

Haben alle Curven eines Büschels sechs Punkte eines Kegelschnittes  $K^2$  gemeinsam, so liegen die anderen drei Grundpunkte auf einer Geraden  $g$ . Legt man durch die ersten sechs Grundpunkte eine beliebige Curve dritter Ordnung, so constituirt sie mit dem Büschel ein Netz. Sie schneidet jede Curve des Büschels in drei Punkten einer Geraden. Jede derselben bildet mit  $K^2$  eine Curve des Netzes. Die eine von ihnen,  $l$ , schneidet  $g$  in  $P$ ; alle durch  $P$  gehenden Curven des Netzes bilden ein Büschel. Zwei dieser Curven sind  $(K^2g)$  und  $(K^2l)$ , also bestehen alle übrigen auch aus  $K^2$  und einer Geraden. Hiermit ist der Satz 21) von Neuem abgeleitet.

Ebenso folgt:

- c) Haben die Curven eines Büschels dritter Ordnung drei Grundpunkte  $A_1A_2A_3$  auf einer Geraden und legt man durch sie eine beliebige Curve dritter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in sechs Punkten eines Kegelschnittes getroffen. Alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel, zu welchem auch der Kegelschnitt



$(\lambda_0^3 \lambda_1^3)$  den Kegelschnitt  $K^2$  in denselben Schnittpunktgruppen.

Die Curven  $\kappa_0^3$  und  $\lambda_0^3$  schneiden sich noch in drei Punkten einer Geraden  $g_0$  und ebenso  $\kappa_1^3$  und  $\lambda_1^3$  in drei Punkten einer Geraden  $g_1$ . Es bilden also  $\kappa_0^3, \lambda_0^3, (K^2 g_0)$  ein Büschel und  $\kappa_1^3, \lambda_1^3, (K^2 g_1)$  ein anderes Büschel. Ordnen wir  $\kappa_0^3$  und  $\kappa_1^3$ ,  $\lambda_0^3$  und  $\lambda_1^3$ ,  $(K^2 g_0)$  und  $(K^2 g_1)$  einander zu, so sind die Büschel projectivisch auf einander bezogen und erzeugen ausser  $K^2$  eine Curve vierter Ordnung  $K^4$ . Diese Curve kann nach dem obigen Satze auch durch die Büschel  $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \dots)$  und  $(\lambda_0^3 \lambda_1^3 \dots)$  erzeugt werden, so dass sich also homologe Curven dieser Büschel in je sechs Punkten von  $K^2$  schneiden.

b) Legt man durch zwei Grundpunkte eines Büschels dritter Ordnung einen Kegelschnitt und durch je vier Punkte, in denen er von einer Curve des Büschels geschnitten wird, und durch irgend einen festen Punkt Kegelschnitte, so bilden diese ein Büschel.

c) Ist eine Curve  $K^5$  fünfter Ordnung durch ein Büschel dritter Ordnung  $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \dots)$  und ein projectivisches Büschel zweiter Ordnung  $(\lambda_0^2 \lambda_1^2 \dots)$  erzeugt und man legt durch die Schnittpunkte von

$$\kappa_0^3 \lambda_0^2, \kappa_1^3 \lambda_1^2, \kappa_2^3 \lambda_2^2, \dots$$

und drei beliebige Punkte von  $K^5$  Curven dritter Ordnung, so treffen sie sich noch in sechs Punkten von  $K^5$ .

d) Ist eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung durch ein Büschel dritter Ordnung  $(\kappa_0^3 \kappa_1^3 \dots)$  und ein projectivisches Büschel erster Ordnung  $(\lambda_0 \lambda_1 \dots)$  erzeugt und man legt durch die Schnittpunkte von

$$\kappa_0^3 \lambda_0, \kappa_1^3 \lambda_1, \kappa_2^3 \lambda_2, \dots$$

und sechs beliebige Punkte von  $K^4$  Curven dritter Ordnung, so treffen sie sich noch in drei Punkten von  $K^4$ .

29. Haben zwei projectivische Büschel dritter Ordnung drei Punkte  $A_1 A_2 A_3$  einer Geraden  $g$  gemein und entsprechen sich diejenigen Curven, welche  $g$  als einen Bestandtheil haben, so treffen sich alle Kegelschnitte, auf denen sich je zwei homologe Curven in sechs Punkten schneiden, in denselben vier Punkten.

Die projectivischen Büschel  $\kappa_0^3 \kappa_1^3 \dots$  und  $\lambda_0^3 \lambda_1^3 \dots$  haben ausser  $A_1 A_2 A_3$  noch die Grundpunkte  $A_4 \dots A_9$  und  $B_4 \dots B_9$ , von denen die ersten auf einem Kegelschnitte  $\kappa^2$ , die anderen auf einem Kegelschnitte  $\lambda^2$  liegen. Dann sind  $(\kappa^2 g)$  und  $(\lambda^2 g)$  entsprechende Curven. Die Curve  $\kappa_0^3$  wird von allen Curven des Büschels  $(\lambda_0^3 \dots)$  in je sechs Punkten geschnitten. Alle diese Kegelschnitte liegen auf einem Kegelschnitte, und alle diese Kegel-





$$(A_1 \dots A_7 XY) \{B_1 \dots B_5\} \text{ und } S(B_1 \dots B_5)$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

Es seien  $B'_1$  und  $B'_2$  die neunten Grundpunkte der Büschel dritter Ordnung  $(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1)$  und  $(A_1 \dots A_7 B_2 B'_2)$ . Man ordne die durch  $B_2 B_3 B_4$  gehenden Curven des ersten Büschels den Strahlen  $SB_2$ ,  $SB_3$ ,  $SB_4$  zu und construire diejenige Curve des Büschels dritter Ordnung, welche dem Strahl  $SB_1$  entspricht; dann ist

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1) \{B_1 B_2 B_3 B_4\} \bar{\wedge} S(B_1 B_2 B_3 B_4),$$

ebenso

$$(A_1 \dots A_7 B_2 B'_2) \{B_1 B_2 B_3 B_4\} \bar{\wedge} S(B_1 B_2 B_3 B_4),$$

also auch

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1) \{B_1 \dots B_4\} \bar{\wedge} (A_1 \dots A_7 B_2 B'_2) \{B_1 \dots B_4\}.$$

Diese Büschel erzeugen eine Curve  $K^6$  sechster Ordnung, welche  $A_1 \dots A_7$  zu Doppelpunkten hat.

Legt man durch  $A_1 \dots A_7$  und die Schnittpunkte zweier homologen Curven irgend eine Curve dritter Ordnung, so schneidet sie  $K^6$  in einem Punktpaare  $XY$ , so dass

$$(A_1 \dots A_7 XY) \{B_1 \dots B_4\} \bar{\wedge} S(B_1 \dots B_4).$$

Es kann auf  $K^6$  nur ein Punktpaar  $X_0 Y_0$  geben, so dass

$$(A_1 \dots A_7 X_0 Y_0) \{B_1 \dots B_5\} \bar{\wedge} S(B_1 \dots B_5),$$

wenn  $B_5$  ein ausserhalb  $K^6$  liegender Punkt ist; denn gäbe es noch ein Punktpaar  $X_1 Y_1$ , für welches

$$(A_1 \dots A_7 X_1 Y_1) \{B_1 \dots B_5\} \bar{\wedge} S(B_1 \dots B_5),$$

so würden die projectivischen Büschel

$$(A_1 \dots A_7 X_0 Y_0) \text{ und } (A_1 \dots A_7 X_1 Y_1)$$

die  $K^6$  erzeugen, auf welcher dann auch  $B_5$  liegen müsste.

Um das Punktpaar  $X_0 Y_0$  zu erhalten, bestimme man eine Curve  $K_1^6$  durch die projectivischen Büschel

$$(A_1 \dots A_7 B_1 B'_1) \{B_1 B_2 B_3 B_5\} \text{ und } (A_1 \dots A_7 B_2 B'_2) \{B_1 B_2 B_3 B_5\}.$$

Die beiden Curven haben gemeinsam die sieben Doppelpunkte  $A_1 \dots A_7$  und die Punkte  $B_1 B'_1 B_2 B'_2 B_3 B'_3$ , wenn  $B'_3$  der neunte Schnittpunkt der durch  $B_3$  gehenden Curven dritter Ordnung ist. Die beiden letzten Schnittpunkte sind die verlangten Punkte  $X_0 Y_0$ .

II. Gegeben sind die 13 Punkte  $A_1 \dots A_6 B_1 \dots B_6 S$ . Man soll drei Punkte  $XYZ$  finden, so dass die projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung

$$(A_1 \dots A_6 XYZ) \{B_1 \dots B_6\} \text{ und } S(B_1 \dots B_6)$$

in projectivischer Beziehung sind.

Nach der vorigen Aufgabe bestimmen wir Punkte  $B'_1 B''_1$  und  $B'_2 B''_2$ , so dass

$$(A_1 \dots A_6 B_1 B'_1 B''_1) \{B_2 B_3 B_4 B_5 B_6\} \bar{\wedge} S(B_2 B_3 B_4 B_5 B_6),$$

$$(A_1 \dots A_6 B_2 B'_2 B''_2) \{B_1 B_3 B_4 B_5 B_6\} \bar{\wedge} S(B_1 B_3 B_4 B_5 B_6)$$



32. Alle Curven vierter Ordnung, welche mittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung durch 13 Punkte gelegt werden können, schneiden sich noch in drei Punkten.

Wenn man erwägt, dass man durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung Curven vierter Ordnung herstellen kann, die in eine Curve dritter Ordnung und eine solche erster Ordnung oder in zwei Curven zweiter Ordnung zerfallen, von denen jede wieder aus zwei Geraden bestehen kann, so folgt:

33. a) Schneiden sich zwei Curven vierter Ordnung in vier Punkten einer Geraden, so liegen die übrigen Schnittpunkte auf einer Curve dritter Ordnung.

b) Schneiden sich zwei Curven vierter Ordnung in acht Punkten eines Kegelschnittes, so liegen die übrigen Schnittpunkte auch auf einem Kegelschnitte.

Es sei  $K^4$  eine Curve vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist; ferner seien  $ABCD$  vier beliebige Punkte von  $K^4$ .

Die Geraden  $AB$  und  $CD$  treffen  $K^4$  noch in  $EF$  und  $GH$ ; die Geraden  $EG$  und  $FH$  treffen  $K^4$  noch in  $A_1B_1$  und  $C_1D_1$ . Legt man dann durch  $A_1B_1C_1D_1$  einen Kegelschnitt  $\lambda_0^2$ , welcher  $K^4$  noch in  $U_0X_0Y_0Z_0$  schneidet, so liegen nach 32 die acht Punkte  $ABCDU_0X_0Y_0Z_0$  auf einem Kegelschnitt  $\kappa_0^2$ . Durchläuft  $\lambda_0^2$  alle Kegelschnitte des Büschels  $(A_1B_1C_1D_1)$ , so durchläuft  $\kappa_0^2$  alle Kegelschnitte des Büschels  $(ABCD)$ . Also:

34. Eine Curve  $K^4$  vierter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel erzeugt werden. Die Grundpunkte des einen und ein Grundpunkt des andern sind beliebig.

In der Abhandlung „Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades“ hat Kortum gezeigt, wie sich mittelst zweier projectivischen Büschel zweiter Ordnung durch 14 Punkte  $A_1 \dots A_{14}$  eine Curve vierter Ordnung legen lässt. Nehmen wir  $A_1 \dots A_4$  zu Grundpunkten des einen Büschels und  $A_5$  als einen Grundpunkt des zweiten, so giebt es nur drei Punkte  $XYZ$  von der Beschaffenheit, dass

$$(A_1 \dots A_4) \{ A_6 \dots A_{14} \} \bar{\cap} (A_5 XYZ) \{ A_6 \dots A_{14} \}.$$

Da nach dem vorigen Satze diese drei Punkte  $XYZ$  auch auf der Curve  $K^4$  liegen müssen, welche mittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung erzeugt ist, so folgt unmittelbar:

35. a) Die Curve  $K^4$ , welche mittelst zweier projectivischen Büschel dritter und erster Ordnung durch 14 Punkte gelegt werden kann, ist identisch mit der



$g$  in einer kubischen Involution, welche mit den Involutionen, die durch die ersten Büschel auf  $g$  ausgeschnitten werden, in projectivischer Beziehung steht und mit ihnen dieselben Doppelpunkte  $P_1 \dots P_6$  hat. Sie muss mit einer der Involutionen zusammenfallen, die durch eines der Büschel  $(\Delta \Delta ABCX'_2 Y'_2), \dots$  auf  $g$  gebildet werden. Denn schneidet die durch  $P_1$  gehende Curve des Büschels  $(\Delta \Delta ABCX''_0 Y''_0)$   $g$  noch in  $Q_1 R_1$ , so muss es unter den unendlich vielen Curven der Büschel  $(\Delta \Delta ABCX'_2 Y'_2), \dots$ , welche durch  $P_1$  gehen, eine geben, die durch  $Q_1$  geht. Sie gehöre dem Büschel  $(\Delta \Delta ABCX'_2 Y'_2)$  an. Da sich also in sieben Punkten  $P_1 \dots P_6 Q_1$  von  $g$  homologe Curven der projectivischen Büschel,  $(\Delta \Delta ABCX''_0 Y''_0)$  und  $(\Delta \Delta ABCX'_2 Y'_2)$  treffen, so treffen sich je zwei homologe Curven in je drei Punkten von  $g$ , d. h. je zwei solche Curven fallen zusammen und alle Punkte

$$X'_2 Y'_2 X'_3 Y'_3 \dots$$

liegen auf  $C^6$ . — Daher bilden alle Curven vierter Ordnung  $K_0^4 K_1^4 \dots$ , welche durch  $(\Delta)$  und die Büschel  $(\Delta \Delta ABCX'_0 Y'_0), (\Delta \Delta ABCX'_1 Y'_1), (\Delta \Delta ABCX'_2 Y'_2), \dots$  erzeugt werden, ein Büschel; sie schneiden  $g$  in den Gruppen  $A_0 B_0 C_0 D_0, \dots$ , in denen diese Gerade von den Curven  $\kappa_0^4 \kappa_1^4 \kappa_2^4 \dots$  geschnitten wird. Auf dieselbe Weise können wir ein Büschel von Curven  $L_0^4 L_1^4 L_2^4 \dots$  vierter Ordnung herstellen, dessen Curven  $\Delta$  zum dreifachen Punkte,  $ABC$  als Grundpunkte haben und  $g$  in denselben Gruppen schneiden, in denen diese Gerade von  $\lambda_0^4 \lambda_1^4 \lambda_2^4 \dots$  geschnitten wird.

Vermittelst einer Steiner'schen Verwandtschaft mit den Hauptpunkten  $AB\Delta$  verwandeln wir erstens

$$K_0^4 K_1^4 K_2^4 \dots \text{ und } L_0^4 L_1^4 L_2^4 \dots \text{ in } K_0^3 K_1^3 K_2^3 \dots \text{ und } L_0^3 L_1^3 L_2^3 \dots,$$

Curven dritter Ordnung zweier Büschel, die  $\Delta$  zum gemeinsamen Doppelpunkt haben, aber nicht durch  $A$  und  $B$  gehen, und zweitens  $g$  in einen Kegelschnitt  $\gamma^2$ , welcher durch  $\Delta$  geht und von den Curven

$$K_0^3 K_1^3 K_2^3 \dots \text{ und } L_0^3 L_1^3 L_2^3 \dots$$

in den Punktquadrupeln

$$\mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0 \mathfrak{C}_0 \mathfrak{D}_0, \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_1, \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2, \dots$$

und

$$\mathfrak{A}'_0 \mathfrak{B}'_0 \mathfrak{C}'_0 \mathfrak{D}'_0, \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{C}'_1 \mathfrak{D}'_1, \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{B}'_2 \mathfrak{C}'_2 \mathfrak{D}'_2, \dots$$

geschnitten wird. Nach 28b) müssen

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_2, \dots \text{ mit } \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{B}'_2 \mathfrak{C}'_2 \mathfrak{D}'_2, \dots$$

zusammenfallen und daher schneiden sich die Curven der Büschel

$$\kappa_0^4 \kappa_1^4 \kappa_2^4 \dots \text{ und } \lambda_0^4 \lambda_1^4 \lambda_2^4 \dots$$

paarweise in je vier Punkten von  $g$ , d. h.:

Wird eine Gerade  $g$  von den Curven eines Büschels vierter Ordnung geschnitten und man legt durch die Schnittpunkte zweier dieser Curven mit  $g$  zwei andere Curven  $\lambda_0^4$



schels in einer Geraden geschnitten. Alle diese Geraden schneiden sich in einem Punkte, welcher auf der Geraden liegt, auf welcher die übrigen vier Grundpunkte des Büschels liegen.

Wenn ferner die Curven des Netzes vierter Ordnung acht Punkte eines Kegelschnittes  $C^2$  gemein haben, so giebt es im Netz unendlich viele Curven, welche aus  $C^2$  und einem Kegelschnitt bestehen. Schneiden sich zwei dieser Kegelschnitte in  $P$ , so gehen wegen  $b)$  unendlich viele derselben durch  $P$  und bilden ein Büschel. Hieraus folgt:

$b'')$  Haben die Curven eines Büschels vierter Ordnung acht Grundpunkte eines Kegelschnittes  $C^2$  gemein und man legt durch diese eine beliebige Curve vierter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in acht Punkten eines Kegelschnittes getroffen. Alle diese Kegelschnitte bilden ein Büschel, zu welchem auch der Kegelschnitt gehört, auf welchem die anderen acht Grundpunkte liegen.

In gleicher Weise folgt:

$b''')$  Haben die Curven eines Büschels vierter Ordnung vier Grundpunkte auf einer Geraden und man legt durch diese irgend eine Curve vierter Ordnung, so wird sie von jeder Curve des Büschels in zwölf Punkten einer Curve dritter Ordnung geschnitten. Alle diese Curven dritter Ordnung bilden ein Büschel, zu welchem auch diejenige Curve gehört, auf welcher die zwölf übrigen Grundpunkte liegen.

39. Sind  $(x_0^4 x_1^4 \dots)$  und  $(\lambda_0^4 \lambda_1^4 \dots)$  projectivische Büschel vierter Ordnung, so bestimmen die Schnittpunkte homologer Elemente neue Büschel vierter Ordnung von der Eigenschaft, dass sich ihre Curven unendlich oft so zu neuen Büscheln ordnen, dass in jedem derselben aus jedem der ersten Büschel eine Curve vorkommt.

Beweis wie in 28.

Folgerungen. (Vergl. 28  $a$ ) etc.)

$a)$  Schneiden die Curven eines Büschels vierter Ordnung eine Curve dritter Ordnung und man legt durch die Schnittpunktgruppen und zwei feste Punkte andere Curven dritter Ordnung, so bilden diese ein Büschel.

$b)$  Schneiden sich je zwei homologe Curven zweier projectivischen Büschel vierter Ordnung in zwölf Punkten derselben Curve dritter Ordnung, so treffen sich die Geraden, auf denen sie sich ausserdem schneiden, in einem Punkte.





Der letzte Satz lässt sich auch auf folgende Art beweisen. Es sei  $K^5$  durch die projectivischen Büschel  $(x_0^4 x_1^4 x_2^4 \dots)$  und  $S(g_0 g_1 g_2 \dots)$  erzeugt. Die Grundpunkte des ersteren seien  $A_1 \dots A_{16}$ ; je zwei homologe Curven schneiden sich in  $B_0 C_0 D_0 E_0, B_1 C_1 D_1 E_1, B_2 C_2 D_2 E_2, \dots$ . Durch  $A_1 \dots A_9$  ist eine Curve  $A^3$  dritter Ordnung bestimmt; es sei  $C_x$  ein Schnittpunkt dieser Curve mit  $K^5$ . Dann legen wir durch  $B_0 C_0 D_0 E_0$ , resp.  $B_1 C_1 D_1 E_1$  und die zehn Punkte  $A_1 \dots A_9 C_x$  zwei Curven  $\lambda_0^4$  und  $\lambda_1^4$  vierter Ordnung. Diese bestimmen ein Büschel, von welchem eine Curve  $\lambda_x^4$  durch  $B_x$  geht. Da  $\lambda_0^4$  und  $x_0^4$ , sowie  $\lambda_1^4$  und  $x_1^4$  sich in je vier Punkten einer Geraden schneiden, so liegen ihre übrigen Schnittpunkte auf  $A^3$ . Deshalb müssen nach 39a) sich auch  $\lambda_x^4$  und  $x_x^4$  und überhaupt die Curven der Büschel  $(x^4 \dots)$  und  $(\lambda^4 \dots)$  paarweise auf  $A^3$  schneiden. Dadurch aber sind diese Büschel projectivisch so auf einander bezogen, dass sie eine Curve fünfter Ordnung erzeugen. Die Schnittpunkte homologer Curven liegen auf Geraden, die ein zu beiden Curvenbüscheln projectivisches Strahlenbüschel bilden (vergl. 39b)), in welchem den Strahlen  $g_0 g_1 g_x$  die Curven  $x_0^4 x_1^4 x_x^4$  und  $\lambda_0^4 \lambda_1^4 \lambda_x^4$  entsprechen. Daher müssen sich irgend zwei entsprechende Curven  $x_m^4$  und  $\lambda_m^4$  auf dem Strahle  $g_m$  schneiden, welcher der Curve  $x_m^4$  in der ursprünglichen Projectivität der Büschel  $(x^4 \dots)$  und  $(S)$  entspricht, d. h. die Curve  $K^5$  kann auch durch die projectivischen Büschel  $(\lambda^4 \dots)$  und  $(S)$  erzeugt werden. Von den Grundpunkten des ersten ist  $C_x$  beliebig auf  $K^5$  gewählt. Auf dieselbe Art kann man noch  $A_1 \dots A_9$  durch neun beliebige Punkte von  $K^5$  ersetzen.

43. Ist  $X$  ein beliebiger Punkt von  $K^5$  und legt man durch die Schnittpunktgruppen der Strahlen von  $(X)$  mit  $K^5$  und durch zehn feste Punkte von  $K^5$  Curven vierter Ordnung, so treffen sich dieselben noch in vier Punkten von  $K^5$ .

Beweis wie in 26.

Mit Hilfe dieses Satzes und einer Steiner'schen Verwandtschaft lässt sich der Satz 35b) (die Umkehrung von 1) beweisen.

Die projectivischen Kegelschnittbüschel

$$(ABCD)\{x_0^2 \dots\} \text{ und } (EFGH)\{\lambda_0^2 \dots\}$$

erzeugen die Curve  $K^4$ . Man nehme  $ABC$  zu Hauptpunkten einer Steiner'schen Verwandtschaft, so entsprechen den Kegelschnittbüscheln zwei projectivische Büschel erster und vierter Ordnung

$$\mathfrak{Q}(k_0 \dots) \text{ und } (A^2 B^2 C^2 \mathfrak{E} \mathfrak{F} \mathfrak{G} \mathfrak{H})\{\lambda_0^4 \dots\},$$

welche eine Curve  $\mathfrak{Q}^5$  mit den drei Doppelpunkten  $ABC$  erzeugen. Durch einen beliebigen Punkt  $\mathfrak{E}$  von  $\mathfrak{Q}^5$  lege man eine Gerade und durch deren vier Schnittpunkte mit  $\mathfrak{Q}^5$  und einen festen Punkt  $\mathfrak{R}$  eine Curve  $\mathfrak{Q}^4$  vierter Ordnung, welche  $ABC$  zu Doppelpunkten hat und jene noch in  $\mathfrak{R} \mathfrak{Q} \mathfrak{R}$  trifft. Dann lässt sich  $\mathfrak{Q}^5$  durch die projectivischen Büschel



$$(A_1 \dots A_{11} B_1 \dots B''''_1) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6\} \overline{\wedge} (A_1 \dots A_{11} B_2 \dots B''''_2) \{B_1 \dots B_6\}.$$

Beide Büschel erzeugen eine Curve achter Ordnung, auf welcher  $X_1 \dots X_5$  liegen müssen. Die durch  $B_1$  gehenden Curven schneiden sich in vier Punkten  $P_1 Q_1 R_1 S_1$ , welche mit  $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$  in einer Curve vierter Ordnung liegen müssen, und die durch  $B_2$  gehenden Curven schneiden sich in  $P_2 Q_2 R_2 S_2$ , die gleichfalls mit  $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$  auf einer Curve vierter Ordnung liegen müssen. In gleicher Weise findet man zwei Büschel vierter Ordnung

$$(A_1 \dots A_{11} B_1 \beta'_1 \beta''_1 \beta'''_1 \beta''''_1) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_7\} \\ \overline{\wedge} (A_1 \dots A_{11} B_2 \beta'_2 \beta''_2 \beta'''_2 \beta''''_2) \{B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_7\}.$$

Diese erzeugen auch eine Curve  $K_1^8$ , auf welcher  $X_1 \dots X_5$  liegen müssen. Die durch  $B_1$ , resp.  $B_2$  gehenden Curven mögen sich schneiden in  $P'_1 Q'_1 R'_1 S'_1$ , resp.  $P'_2 Q'_2 R'_2 S'_2$ , dann müssen diese Punkte auf solchen Curven vierter Ordnung liegen, welche durch  $X_1 \dots X_5 A_1 \dots A_{11}$  gehen. Daher findet man die gesuchten Punkte  $X_1 \dots X_5$  als Schnittpunkte zweier Curven vierter Ordnung, welche durch die Punkte

$$A_1 \dots A_{11} P_1 Q_1 R_1 S_1 P'_1 Q'_1 R'_1 S'_1 \text{ und } A_1 \dots A_{11} P_2 Q_2 R_2 S_2 P'_2 Q'_2 R'_2 S'_2$$

bestimmt sind.

Man vergl. über diese Auflösung: „Kortum, Aufgaben dritten und vierten Grades“.

- c) Aufgabe. Gegeben sind die Punkte  $A_1 \dots A_{10} B_1 \dots B_9 S$ ; man soll sechs Punkte  $X_1 \dots X_6$  finden, so dass die Büschel vierter und erster Ordnung

$$(A_1 \dots A_{10} X_1 \dots X_6) \{B_1 \dots B_9\} \text{ und } S(B_1 \dots B_9)$$

in projectivischer Beziehung sich befinden.

Mittelst der vorigen Aufgabe findet man

$$(A_1 \dots A_{10} B_1 B'_1 \dots B_1^{(5)}) \{B_2 \dots B_7 B_8\} \overline{\wedge} S(B_2 \dots B_7 B_8), \\ (A_1 \dots A_{10} B_2 B'_2 \dots B_2^{(5)}) \{B_1 B_3 \dots B_7 B_8\} \overline{\wedge} S(B_1 B_3 \dots B_7 B_8).$$

Man suche in beiden Büscheln die den Strahlen  $SB_1$ , resp.  $SB_2$  entsprechenden Curven und erhält dadurch zwei dem Büschel  $S(B_1 \dots B_8)$  und daher sich selbst projectivische Büschel vierter Ordnung, welche eine Curve  $K^8$  mit den Doppelpunkten  $A_1 \dots A_{10}$  erzeugen, auf der  $X_1 \dots X_6$  liegen. — Legt man durch die Schnittpunkte zweier homologen Curven und durch  $A_1 \dots A_{10}$  irgend eine Curve vierter Ordnung, so bestimmen ihre Schnittpunkte mit  $K^8$  und die Punkte  $A_1 \dots A_{10}$  die Grundpunkte eines zum Büschel (S) projectivischen Büschels vierter Ordnung, welches mit diesem eine Curve fünfter Ordnung durch die 19 Punkte

$$A_1 \dots A_{10} B_1 \dots B_8 S$$

erzeugt. Die auf diese Art erhaltenen Curven fünfter Ordnung, welche durch dieselben 19 Punkte gehen, schneiden  $K^8$  in denselben Punkten. Oder: Durch die Schnittpunkte



$$(A_1 \dots A_4 X_1 \dots X_5) \{B_1 \dots B_{11}\} \overline{\wedge} (S_1 \dots S_4) \{B_1 \dots B_{11}\}.$$

e) Aufgabe. Gegeben sind die Punkte  $A_1 A_2 A_3 B_1 \dots B_{13} S_1 \dots S_4$ ; man soll die sechs Punkte  $X_1 \dots X_6$  so bestimmen, dass

$$(A_1 A_2 A_3 X_1 \dots X_6) \{B_1 \dots B_{13}\} \overline{\wedge} (S_1 \dots S_4) \{B_1 \dots B_{13}\}.$$

Man löst die letzten fünf Aufgaben wie die vorhergehenden.

47. Die durch projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugten Curven fünfter Ordnung können zerfallen in eine Curve erster und vierter Ordnung oder zweiter und dritter Ordnung.

Ist  $K^5$  eine Curve fünfter Ordnung, welche durch zwei projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugt ist, so lege man durch vier beliebige Punkte  $ABCD$  zwei Kegelschnitte  $\kappa^2$  und  $\lambda^2$ , welche  $K^5$  noch in  $A_1 \dots A_6$  und  $B_1 \dots B_6$  schneiden. Durch  $A_1 \dots A_6$  und drei Punkte  $C_1 C_2 C_3$  von  $K^5$  lege man eine Curve  $\lambda^3$  dritter Ordnung und betrachte  $(\lambda^2 \lambda^3)$  auch als eine Curve fünfter Ordnung, so lassen sich durch die Schnittpunkte von  $K^5$  und  $(\lambda^2 \lambda^3)$  nach dem Satze in 44c) unendlich viele Curven fünfter Ordnung legen. Die eine derselben besteht aus  $\kappa^2$  und einer Curve  $\kappa^3$  dritter Ordnung, welche daher  $\lambda^3$  ausser in  $C_1 C_2 C_3$  noch in sechs Punkten  $C_4 \dots C_9$  schneiden muss. Lässt man Alles fest bis auf den Kegelschnitt  $\lambda^2$ , so ändert sich, während dieser das Büschel  $(ABCD)$  durchläuft, auch  $\kappa^3$ , welche Curve das Büschel  $(C_1 \dots C_9)$  durchläuft. Die Curven der Büschel  $(\lambda^2 \dots)$  und  $(\kappa^3 \dots)$  schneiden sich daher stets auf  $K^5$  und es folgt:

Ist eine Curve  $K^5$  fünfter Ordnung durch zwei projectivische Büschel vierter und erster Ordnung erzeugt, so kann sie auf unzählige Arten durch zwei Büschel zweiter und dritter Ordnung erzeugt werden. Von den Grundpunkten sind die des Büschels zweiter Ordnung und drei des Büschels dritter Ordnung beliebig auf der Curve zu wählen.

48. Eine Curve  $K^6$  sei durch zwei projectivische Büschel fünfter und erster Ordnung erzeugt. Dann leiten wir mit Hilfe derselben Methoden den Satz ab:

a) Legt man durch einen Punkt  $S$  von  $K^6$  einen variablen Strahl  $x$ , welcher  $K^6$  in fünf Punkten schneidet, und durch diese und 15 feste Punkte von  $K^6$  eine Curve  $X^5$  fünfter Ordnung, so durchläuft dieselbe die Curven eines Büschels fünfter Ordnung, dessen sämtliche Grundpunkte auf  $K^6$  liegen.

b) Jeder Kegelschnitt  $K^2$  wird von  $K^6$  in zwölf Punkten geschnitten.

Fünf Schnittpunkte seien  $A_1 \dots A_4 B$ . Man erzeuge  $K^6$  durch die projectivischen Büschel fünfter und erster Ordnung  $(A_1 \dots A_4 \dots)$  und  $(B)$ . Jede Curve des ersten schneidet  $K^2$  in sechs Punkten. Durch diese und drei feste Punkte legen wir Curven dritter Ordnung, die ein Büschel



viele Curven sechster Ordnung legen. Da es aber durch 18 Punkte ebensoviele Curven sechster Ordnung giebt, als Curven dritter Ordnung in einer Ebene (nämlich  $\infty^9$ ), so muss unter ihnen auch  $K_1^6$  vorkommen.

- i) Die Curve  $K^6$ , welche durch zwei projectivische Büschel fünfter und erster oder vierter und zweiter Ordnung erzeugt ist, kann auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel dritter Ordnung erzeugt werden.

Wir nehmen auf  $K^6$  sieben beliebige feste Punkte  $A_1 \dots A_7$  und einen beliebigen achten  $A_8$  variabel und betrachten  $A_1 \dots A_8$  als Basis eines Büschels dritter Ordnung, dessen neunter Grundpunkt  $A_9$  sein mag.

Wenn  $A_8$  die Curve  $K^6$  durchläuft, so durchläuft  $A_9$  (vgl. Crelle's Journal Jahrg. 1873, „Bemerkung zu der Geiser'schen Abhandlung“, von Milinowski) eine Curve  $\mathcal{R}$ . Diese schneidet  $K^6$ . Dadurch erhält man zusammengehörige Punkte  $A_8$  und  $A_9$  und also auf  $K^6$  die Basis eines Büschels dritter Ordnung.

Durch  $A_1 \dots A_9$  legen wir zwei Curven  $K^3$  und  $K_1^3$  dritter Ordnung, welche  $K^6$  noch in  $B_1 \dots B_9$  und  $C_1 \dots C_9$  schneiden. Dann lassen sich wegen e) und g) durch die 27 Punkte  $A_1 \dots A_9 B_1 \dots B_9 C_1 \dots C_9$  unendlich viele Curven sechster Ordnung legen, die  $K^6$  wegen h) noch in neun Punkten  $X_1 \dots X_9$  schneiden, welche sowohl mit  $B_1 \dots B_9$  auf einer  $B^3$ , als mit  $C_1 \dots C_9$  auf einer Curve  $C^3$  liegen. Daraus folgt, dass  $X_1 \dots X_9$  Grundpunkte eines Büschels dritter Ordnung sind. Jede durch  $X_1 \dots X_9$  gelegte Curve dritter Ordnung muss  $K^6$  noch in solchen neun Punkten  $Z_1 \dots Z_9$  schneiden, welche mit  $A_1 \dots A_9$  auf einer Curve dritter Ordnung liegen.

Daher kann  $K^6$  durch die Büschel dritter Ordnung  $(A_1 \dots A_9)$  und  $(X_1 \dots X_9)$  erzeugt werden.

Von den Grundpunkten sind  $A_1 \dots A_7$  und einer der neun Punkte  $X$  beliebig.

49. Wenn wir die angewendeten Methoden weiter benutzen, so gelangen wir zu analogen Sätzen über Curven höherer Ordnungen und können schliesslich folgende ganz allgemeinen Sätze aufstellen:

- a) Wenn eine Curve  $C^n$   $n^{\text{ter}}$  Ordnung durch zwei projectivische Büschel erster und  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung erzeugt ist und man legt durch einen beliebigen Punkt  $X$  von  $C^n$  einen variablen Strahl  $x$ , welcher  $C^n$  in  $n-1$  Punkten schneidet, durch diese und  $\frac{n(n-1)}{2}$  feste Punkte

von  $C^n$  Curven  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung, so bilden diese ein Büschel, dessen Grundpunkte auf  $K^6$  liegen.

- b) Diese Curve  $K^6$  kann auch auf unzählige Arten durch zwei projectivische Büschel zweiter und  $(n-2)^{\text{ter}}$





Ist  $\alpha_d$  derjenige Strahl des Büschels ( $A$ ), welcher durch den Doppelpunkt geht, so muss die ihm entsprechende Curve  $\alpha^3_d$  ihn im Doppelpunkte berühren und daher geht auch die conische Polare  $\alpha^2_d$  von  $A$  nach  $\alpha^3_d$  durch den Doppelpunkt hindurch. Da sich also  $\alpha_d$  und  $\alpha^3_d$  im Doppelpunkte schneiden, so ist dieser ein Punkt von  $A^3$ .

52. Besteht  $C^4$  aus einer Curve  $C^3$  dritter Ordnung und einer Geraden  $g$ , so zerfällt die erste Polare eines Punktes  $A$  von  $g$  in diese Gerade und einen Kegelschnitt.

Die Curven  $\alpha^3...$  haben in diesem Falle drei ihrer Grundpunkte auf  $g$  und die übrigen sechs, die auf einem Kegelschnitte  $\mathcal{R}^2$  liegen müssen, auf  $C^3$ , und dem Strahl  $g$  von ( $A$ ) entspricht im Büschel ( $\alpha^3...$ ) die Curve ( $\mathcal{R}^2, g$ ). Weiter ist die conische Polare von  $A$  nach ( $\mathcal{R}^2, g$ ) ein Geradenpaar ( $g', g$ ). Da dieses im Kegelschnittbüschel ( $\alpha^2...$ ) dem Strahl  $g$  von ( $A$ ) entspricht, so ist  $g$  ein Theil der ersten Polare von  $A$ .

53. Besteht  $C^4$  aus vier Geraden  $g_1 g_2 g_3 g_4$ , so zerfällt die erste Polare  $A^3$  eines Punktes  $A$  von  $g_1$  in  $g_1$  und einen Kegelschnitt  $\mathcal{U}^2$ .

Das Büschel ( $\alpha^3...$ ) zerfällt in diesem Falle in ein Strahlenbüschel ( $B$ ), dessen Scheitel auch auf  $g_1$  liegen mag und jeder beliebige Punkt dieser Geraden sein kann, und in zwei feste Gerade  $g_3$  und  $g_4$ . Es sind die Strahlenbüschel  $A(\alpha...)$  und  $B(\beta...)$  in projectivischer Beziehung und perspectivischer Lage, weil sie  $g_2$  erzeugen. Jeder Strahl  $\beta$  bestimmt mit  $g_3 g_4$  eine dreiseitige Curve und die conischen Polaren  $\alpha^2$  von  $A$  nach diesen sämtlichen dreiseitigen Curven bilden ein Büschel, von dessen Grundpunkten zwei,  $M$  und  $N$ , auf  $AB$  liegen. Zieht man von  $A$  nach ( $g_3 g_4$ ), welchen Punkt wir  $\Delta$  nennen wollen, die Gerade  $a$  und ist  $g_3 g_4$  durch  $aa'$  harmonisch getrennt, so berühren alle  $\alpha^2$  die Gerade  $a'$  in  $\Delta$ . Dem Strahl  $AB$  von ( $A$ ) entspricht im Büschel ( $\alpha^2...$ ) das Geradenpaar ( $AB, a'$ ), so dass also  $A^3$  in  $AB$  und einen Kegelschnitt  $\mathcal{U}^2$  zerfallen muss, welcher durch die drei Schnittpunkte von  $g_2 g_3 g_4$  geht.

Nehmen wir jetzt an,  $g_2$  gehe durch  $\Delta_{34}$ , so dass also die drei Ecken des Dreiseits  $g_2 g_3 g_4$  in  $\Delta_{34}$  vereinigt sind, so müssen alle Schnittpunkte von  $\mathcal{R}^2$  mit  $g_2 g_3 g_4$  in  $\Delta$  liegen und dies ist nur möglich, wenn  $\mathcal{U}^2$  in ein Geradenpaar zerfällt, dessen Scheitel in  $\Delta_{34}$  liegt. In diesem Falle entspricht nämlich dem Strahl  $A\Delta$  von ( $A$ ) das Geradenpaar  $\Delta M$  und  $\Delta N$ , so dass  $\mathcal{U}^2$  in  $\Delta_{34}$  einen Doppelpunkt hat und also ein Geradenpaar wird.

Wenn wir endlich noch annehmen, dass auch  $g_1$  durch  $\Delta$  geht, so folgt:

54. Besteht  $C^4$  aus vier sich in einem Punkte schneidenden Geraden  $g_1 g_2 g_3 g_4$ , so zerfällt die erste Polare  $A^3$  eines Punktes  $A$  einer derselben in diese und zwei andere Geraden, die sich in  $\Delta$  schneiden.

Wenn eine Curve  $C^4$  einen dreifachen Punkt  $\Delta_3$  hat, so kann man ~~tab~~ dieselbe erzeugt denken durch ein Strahlenbüschel  $A(\alpha...)$  und ein







$P_1$  nach  $P_0^3$  oder, was dasselbe ist, auf der Polare auf  
conischen Polare  $P_{10}^2$  nach  $P_0^3$  liegen. Die con  
der conischen Polare  $P_{01}^2$  von  $P_0$  nach  $P_1^3$  zu  
der Polare von  $P_1$  nach  $P_{01}^2$ . Diese fällt  
nach  $P_{11}^2$ , d. h. nach der conischen Polare  
bischen Polare  $P_1^3$  zusammen. in die gem  
 $P_0$  nach  $P_1^3$  und daher liegt  $P_0$  auf d  
auf  $P_{11}^2$  selbst, und hieraus folgt:

62. Liegt ein Punkt  $P_1$  auf d  
andern  $P_0$  nach seiner k  
auf der conischen Po  
kubischen Polare  $P_1^3$ .

Man nennt die conische  
kubischen Polare  $P_0^3$  die con

Liegt ein Punkt  $P_1$  eine  
Geraden zu Leitlinien  
muss  $P_0$  auf der conische  
Diese Curve fällt aber  
zusammen und da als  
muss es auf  $P_1^3$  selb.

$$-x(1+\alpha)=0;$$

63. Liegt ein

$P_0$ , so lieg

umgeke

Denn lieg

$P_{01}^2$  oder  $P_{10}^2$

durch  $P_1$

gehen.

Is

ger l

der

Fer

geh

$$-x^2 - y^2 = 0$$

der Geraden  $h$  ergibt sich ganz

zug in die Form

$$-2z - p)y^2 = 0,$$

die Doppelebenen der Involution  
Fläche zusammenhängt.\*\* Die  $z$ -Axe

$$z = \frac{p}{2} \text{ und } z = -\frac{p}{2} \text{ reelle Gerade der}$$

liegen auch ihre Cuspidalpunkte.

hyperbolischen Paraboloid ge-

Paaren gerader Linien von

Punkte des Paraboloids von bei

Paare gleichweit entfernt sind

Geradenpaare bildet eine Rege

deren Erzeugenden auf d

stehen. Je zwei Geraden ein

ander in Bezug auf das P

## XI.

# Ueber das gleichseitige hyperbolische Paraboloid und ein aus ihm abgeleitetes Strahlensystem.

Von  
Dr. ARTHUR SCHOENFLIES  
in Berlin.

### § 1.

Der Ort aller Punkte des Raumes, welche von zwei windschiefen Geraden gleichweit entfernt sind, ist bekanntlich ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Sind nämlich

$$1) \quad \begin{aligned} z - a &= 0, & y - \alpha x &= 0, \\ z + a &= 0, & y + \alpha x &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden  $g$  und  $h$ , so ist

$$az + \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} xy = 0$$

die Gleichung des betrachteten Ortes. Setzt man noch

$$2) \quad x = (y' + x')\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad y = (y' - x')\sqrt{\frac{1}{2}}, \quad z = z'$$

und

$$3) \quad a \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} = p,$$

so verwandelt sich die Gleichung des Paraboloids, wenn wir die Striche bei den neuen Coordinaten wieder weglassen, in

$$4) \quad x^2 - y^2 = 2pz.$$

Die Gleichungen der beiden Geraden  $g$  und  $h$  sind in dem neuen Coordinatensystem

$$5) \quad \begin{aligned} z - a &= 0, & y(1 - \alpha) - x(1 + \alpha) &= 0, \\ z + a &= 0, & y(1 + \alpha) - x(1 - \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Sie zeigen unmittelbar, dass die Polarebene eines jeden beliebigen Punktes  $P$  der Geraden  $g$  in Bezug auf das Paraboloid durch die Gerade  $h$  hindurchgeht. Daraus folgt:

Die Geraden  $g$  und  $h$  sind Polarlinien von einander in Bezug auf das Paraboloid.

Die Aufgabe, zu einem gegebenen gleichseitigen Paraboloid die Geraden  $g$  und  $h$  zu finden, lässt unendlich viele Lösungen zu. Zwischen den gesuchten Grössen  $a$  und  $\alpha$  besteht nämlich nur die Gleichung 3), daher existiren unendlich viele Geradenpaare der betrachteten Art. Da diese Gleichung in  $a$  vom ersten, in  $\alpha$  vom zweiten Grade ist, so folgt, dass durch jeden Punkt der  $z$ -Axe zwei Strahlen  $g$ , resp.  $h$  laufen, welche sämmtlich die unendlich ferne Gerade der  $xy$ -Ebene schneiden, in einem Punkte, welcher durch  $\alpha$  bestimmt ist. Demnach zeigt die Gleichung 3), dass die Schnittpunkte der Geraden  $g$ , resp.  $h$  mit der  $z$ -Axe eine einfache Punktreihe bilden, während ihre Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden eine Involution von Punkten erzeugen. Der Ort dieser Geraden ist daher, wie Cremona gezeigt hat,\* eine Regelfläche dritter Ordnung, welche jene beiden Geraden zu Leitlinien und die  $z$ -Axe zur Doppelgeraden hat.

Die Gleichung dieser Fläche findet man durch Elimination von  $\alpha$  aus den Gleichungen

$$z = \frac{\alpha p}{1 + \alpha^2}, \quad y(1 - \alpha) - x(1 + \alpha) = 0;$$

man erhält

$$6) \quad 2z(x^2 + y^2) + p(x^2 - y^2) = 0$$

als den Ort der Geraden  $g$ ; als Ort der Geraden  $h$  ergibt sich ganz dieselbe Fläche.

Bringen wir die letzte Gleichung in die Form

$$(2z + p)x^2 + (2z - p)y^2 = 0,$$

so finden wir, dass  $x = 0$  und  $y = 0$  die Doppelebenen der Involution von Ebenen sind, welche mit der Fläche zusammenhängt.\*\* Die  $z$ -Axe

ist nur zwischen den Punkten  $z = \frac{p}{2}$  und  $z = -\frac{p}{2}$  reelle Gerade der Fläche. In diesen beiden Punkten liegen auch ihre Cuspidalpunkte. Demnach ergibt sich:

Zu jedem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid gehört eine unendliche Menge von Paaren gerader Linien von der Eigenschaft, dass alle Punkte des Paraboloids von beiden Geraden eines jeden Paares gleichweit entfernt sind. Die Gesammtheit dieser Geradenpaare bildet eine Regelfläche  $R_3$  vom dritten Grade, deren Erzeugenden auf der Doppelgeraden senkrecht stehen. Je zwei Geraden eines Paares sind Polarlinien von einander in Bezug auf das Paraboloid.

\* *Atti del R. Istit. Lomb.* Bd. 2, S. 291.

\*\* *Salmon, Analyt. Geometrie des Raumes* Bd. 2, S. 316.

§ 2.

Wir betrachten irgend eine beliebige Gerade  $g$  der Fläche  $R_2$  und eine der beiden Geradenschaaren des Paraboloids. Auf jeder dieser Geraden giebt es einen Punkt, welcher von  $g$  den kürzesten Abstand hat, und dazu einen Strahl, welcher diesen Punkt mit dem entsprechenden Punkte von  $g$  verbindet, der also die kürzeste Entfernung beider Geraden enthält. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine Curve und die Gesammtheit jener Strahlen eine geradlinige Fläche.

Um diese Gebilde zu untersuchen, stellen wir das gleichseitige Paraboloid dar durch die Gleichungen

$$1) \quad x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{uv}{2p}.$$

Dann giebt  $u = \text{const.}$  das eine System der geraden Linien und  $v = \text{const.}$  das andere. Die Gleichungen einer Geraden  $u$  sind

$$2) \quad \begin{aligned} x - \frac{u}{2} &= \frac{p}{R_1} r_1, \\ y - \frac{u}{2} &= -\frac{p}{R_1} r_1, \quad R_1^2 = u^2 + 2p^2, \\ z &= \frac{u}{R_1} r_1, \end{aligned}$$

und die der Geraden  $g$

$$3) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1-\alpha}{R} r, \\ y &= \frac{1+\alpha}{R} r, \quad R^2 = 2(1+\alpha^2), \\ z - a &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun durch  $d$  die Entfernung des Punktes  $r=0$  der Geraden  $g$  vom Punkte  $r_1=0$  der Geraden  $u$ , durch  $r'$ , resp.  $r'_1$  die Abscissen derjenigen Punkte beider Geraden, welche den kürzesten Abstand von einander haben, so gelten folgende Gleichungen:\*

$$4) \quad \begin{aligned} r' &= \frac{d}{\sin^2(ug)} \{ \cos(ud) \cos(ug) - \cos(gd) \}, \\ r'_1 &= -\frac{d}{\sin^2(ug)} \{ \cos(gd) \cos(ug) - \cos(ud) \}, \end{aligned}$$

und zwar ist in dem hier betrachteten Falle, wie sich ohne Mühe ergibt, mit Rücksicht auf Gleichung 3), § 1,

$$\cos(ug) = -a \frac{R}{R_1}, \quad \sin^2(ug) = \frac{R_2^2}{R_1^2},$$

\* Hesse, *Analyt.* (



$$d \cos(gd) = -\frac{u}{R}, \quad d \cos(ud) = \frac{au}{R_1},$$

wo

$$5) \quad R_2^2 = u^2 + 2 \frac{p^2}{1 + \alpha^2}$$

gesetzt ist. Daher wird

$$6) \quad r' = \frac{u}{R},$$

$$7) \quad r'_1 = 0.$$

Die letzte Gleichung lehrt, dass  $r'_1$  von  $a$  und  $\alpha$  ganz unabhängig ist, d. h. der Werth von  $r'_1$  ändert sich nicht, wenn wir  $g$  durch eine andere Gerade der Fläche  $R_2$  ersetzen. Auf jeder Geraden  $u$  fallen also die Punkte, welche von den einzelnen Geraden der Regelfläche den kürzesten Abstand haben, in einen einzigen zusammen. Seine Gleichungen ergeben sich in der Form

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = \frac{u}{2}, \quad z = 0.$$

Die Gesammtheit dieser Punkte bildet eine gerade Linie, nämlich die Gerade  $v=0$ . Analoge Resultate gelten für die Geraden  $v=const$ . Demgemäss ergibt sich:

Auf jeder Geraden des Paraboloids giebt es einen bestimmten Punkt, welcher zugleich von allen Geraden der Fläche  $R_2$  die kürzeste Entfernung hat. Die Gesammtheit dieser Punkte bildet für jede Regelschaar des Paraboloids eine gerade Linie, nämlich für die Geraden  $u$  die Gerade  $v=0$ , und für die Geraden  $v$  die Gerade  $u=0$ .

Seien nun  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  die Richtungscosinus des Strahles  $s$ , der die Punkte kürzesten Abstandes auf  $g$  und einer Geraden  $u$  mit einander verbindet, so ist

$$\alpha_1 = \frac{(1+\alpha)u}{R R_2}, \quad \beta_1 = -\frac{(1-\alpha)u}{R R_2}, \quad \gamma_1 = -\frac{2p}{R R_2},$$

und da die Gerade  $s$  durch den Punkt  $r_1=0$  auf  $v$  hindurchgeht, so sind ihre Gleichungen

$$8) \quad x - \frac{u}{2} = \frac{(1+\alpha)u}{R R_2} s, \quad y - \frac{u}{2} = -\frac{(1-\alpha)u}{R R_2} s, \quad z = -\frac{2p}{R R_2} s.$$

Eliminiren wir aus ihnen  $u$  und  $s$ , so erhalten wir die von den Strahlen  $s$  gebildete Fläche, deren Erzeugungslinien also zugleich auf  $g$  und je einer Geraden  $u$  senkrecht stehen. Es ergibt sich zunächst

$$(1-\alpha)x + (1+\alpha)y - u = 0, \quad \frac{x-y}{z} = -\frac{u}{p},$$

und hieraus

$$9) \quad (x-y)p + z[(1-\alpha)x + (1+\alpha)y] = 0,$$

d. h. die Fläche ist wieder ein Paraboloid. Also folgt:



durchgehen; diese Anzahl ist identisch mit der Anzahl der Werthepaare  $u, v$ , welche sich aus den Gleichungen 2) ergeben, wenn wir in ihnen  $x, y, z$  durch  $x_1, y_1, z_1$  ersetzen. Wir erhalten für  $u$  und  $v$  die Gleichungen

$$3) \quad u = \frac{q}{4z_1^2} \{ (y_1 - x_1)q + 4x_1z_1 \}, \quad v = \frac{-q}{4z_1^2} \{ (y_1 - x_1)q + 4y_1z_1 \},$$

d. h. es gehört im Allgemeinen zu jedem Werthepaare  $x_1, y_1, z_1$  auch nur ein Werthepaar  $u, v$ , also geht auch nur ein Strahl durch einen beliebigen Punkt des Raumes. Das Strahlensystem ist daher von der ersten Ordnung. Nur in dem Falle, dass zugleich

$$4) \quad z_1 = 0 \text{ und } x_1 - y_1 = 0$$

ist, wenn also der Punkt  $x_1, y_1, z_1$  auf der durch diese Gleichungen dargestellten Geraden liegt, kann eine Ausnahme eintreten. Die Untersuchung dieses Falles kann einfach in folgender Weise geführt werden. Das Strahlensystem  $\Sigma$  wird gebildet von der Gesamtheit der im vorigen Paragraphen, Gleichungen 8) und 9) erwähnten Paraboloiden. Suchen wir nun diejenige Gerade  $s$  eines dieser Paraboloiden, welche durch einen bestimmten Punkt der Geraden 4) hindurchgeht, so haben wir in den Gleichungen 8), § 2, nur  $u$  als constant zu betrachten; dann stellen sie den verlangten Strahl  $s$  dar. Eliminiren wir nun aus ihnen  $\alpha$  und  $s$ , so erhalten wir den geometrischen Ort aller Strahlen von  $\Sigma$ , welche durch den Punkt  $x_1, y_1, z_1$  hindurchgehen. Die sich ergebende Gleichung ist

$$5) \quad (x - y)p + uz = 0,$$

also gehen durch jeden Punkt der Geraden 4) unendlich viele Strahlen des Strahlensystems, welche eine Ebene bilden. In ihr liegt auch die Gerade 4) selber.

Die Classe des Systems, d. h. die Anzahl der Strahlen, welche in einer beliebigen Ebene des Raumes liegen, wird gefunden, indem wir  $x, y, z$  in die Gleichung einer beliebigen Ebene

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$$

einsetzen und die Bedingung aufstellen, dass die linke Seite für jeden Werth von  $s$ , d. h. identisch verschwindet. Dies giebt für  $u$  und  $v$  die Gleichungen

$$6) \quad u = \frac{4\beta_1\delta_1 + (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 q}{(\alpha_1 + \beta_1)^2}, \quad v = \frac{4\alpha_1\delta_1 - (\alpha_1 + \beta_1)\gamma_1 q}{(\alpha_1 + \beta_1)^2},$$

d. h. im Allgemeinen liegt in jeder Ebene des Raumes nur ein Strahl, das Strahlensystem ist also von der ersten Classe. Eine Ausnahme kann nur dann eintreten, wenn zugleich

$$7) \quad \alpha_1 + \beta_1 = 0, \quad \delta_1 = 0$$

oder

$$8) \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0$$



rade hindurchgeht, enthält unendlich viele Strahlen, welche sich in einem Punkte derselben schneiden.

Hieraus folgt, dass das Strahlensystem  $\Sigma$  mit demjenigen identisch ist, welches Plücker a. a. O. § 68 behandelt.

Man kann auch umgekehrt aus dem Strahlensystem  $\Sigma$  das gleichseitige Paraboloid ableiten; jeder Punkt der Geraden  $x - y = 0, z = 0$  kann zum Scheitelpunkte desselben gewählt werden.

Von den mit dem Strahlensystem verbundenen Flächen, welche Herr Kummer in seiner oben erwähnten Arbeit behandelt hat, gestatten auch die Grenzflächen eine einfache Behandlung. In der quadratischen Gleichung, von deren Wurzeln sie abhängen, wird nämlich der Coefficient des mittleren Gliedes gleich Null, und daher gelingt ihre Bestimmung ohne grosse Schwierigkeit. Sie sind vom sechsten Grade. Sie besitzen eine vierfache Gerade  $x - y = 0, z = 0$  und eine Doppelgerade  $z = 0, t = 0$ . Sie können als das Erzeugniss zweier projectivischen Flächenbüschel betrachtet werden, nämlich einer Involution von Ebenen, deren Axe die Gerade  $x = 0, z = 0$  ist, und eines Büschels von Flächen vierter Ordnung mit doppeltem Kegelschnitt. Dieser doppelte Kegelschnitt besteht aus den beiden Geraden  $x - y = 0, z = 0$ , und  $z = 0, t = 0$ .

Ebenso existirt ein analoges Strahlensystem  $\Sigma_1$  erster Ordnung und erster Classe, gebildet von den Strahlen  $s_1$ , welche aus der Regelschaar  $v$  des ursprünglichen gleichseitigen Paraboloids entspringen. Die Gleichungen der Geraden  $s_1$  sind

$$13) \quad \begin{aligned} x - \frac{v}{2} &= \frac{(1 + \alpha)v}{R R_3} s_1, \\ y + \frac{v}{2} &= -\frac{(1 - \alpha)v}{R R_3} s_1, \quad R_3^2 = v^2 + 2 \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} p^2, \\ z &= -\frac{2\alpha p}{R R_3} s_1. \end{aligned}$$

Hier ist zu substituiren

$$14) \quad (1 + \alpha)v = \alpha u', \quad (1 - \alpha)v = \alpha v', \quad 2p = q,$$

so werden, mit Unterdrückung der Striche bei den neuen Variabeln, die Gleichungen des Strahlensystems  $\Sigma_1$

$$15) \quad \begin{aligned} x &= \frac{u - v}{4} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + q^2}}, \\ y &= -\frac{u - v}{4} + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + q^2}}, \\ z &= -\frac{q}{\sqrt{u^2 + v^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Dasselbe besitzt ganz ähnliche Eigenschaften, wie das Strahlensystem  $\Sigma$ . An die Stelle der Geraden  $x - y = 0, z = 0$  tritt die Gerade  $x + y = 0, z = 0$ .



$$4) \quad u : -v : -q = \lambda : \mu : \nu, \quad \frac{u+v}{4} = \xi$$

genügen, was stets bewirkt werden kann. Sie zeigen, dass die Grössen  $u$ ,  $-v$ ,  $-q$  den Richtungscosinus proportional sind. Der Proportionalitätsfactor bestimmt sich durch den Punkt der Geraden  $x - y = 0$ ,  $z = 0$ , in welchem sie von dem Strahl getroffen wird. — Nur in dem Falle, dass  $\lambda = \mu$  ist, könnte es scheinen, als ob die Gleichungen 4) nicht befriedigt werden könnten. In diesem Falle ist aber die Gerade 3) parallel zu  $x - y = 0$ ,  $z = 0$ , d. h. sie geht durch den unendlich fernen Punkt derselben, und man hat, um die Gleichungen 4) zu erfüllen,  $u$  einen positiven,  $v$  einen negativen unendlich grossen Werth zu geben.

Der betrachtete Strahlencomplex ist von der ersten Ordnung und von der ersten Classe. Denn alle Strahlen, welche durch einen beliebigen Punkt  $P$  des Raumes gehen, bilden eine Ebene, welche den Punkt  $P$  und die Gerade  $x - y = 0$ ,  $z = 0$  enthält. Ferner giebt es in jeder Ebene unendlich viele Strahlen, die sämmtlich durch ihren Schnittpunkt  $Q$  mit der Geraden  $x - y = 0$ ,  $z = 0$  hindurchgehen. Demnach ergibt sich:

Die Gesammtheit der Strahlssysteme  $\Sigma$ , welche aus den Flächenschaaren entspringen, die durch Gleichung 1) und 2) dargestellt sind, erzeugt einen Strahlencomplex erster Ordnung und erster Classe. Er wird von sämmtlichen Strahlen des Raumes gebildet, welche die Gerade  $x - y = 0$ ,  $z = 0$  schneiden.

Dieser Complex ist identisch mit demjenigen, welchen Plücker a. a. O. § 45 behandelt hat.

Ebenso existirt ein Complex, gebildet von den Strahlssystemen  $\Sigma_1$ ; er enthält sämmtliche Strahlen des Raumes, welche die Gerade  $x + y = 0$ ,  $z = 0$  schneiden.

Beide Complexe haben ein Strahlssystem nullter Ordnung und erster Classe gemein, nämlich alle Strahlen, welche zugleich die Gerade  $x - y = 0$ ,  $z = 0$  und  $x + y = 0$ ,  $z = 0$  schneiden, d. h. alle geraden Linien der  $xy$ -Ebene. Diese beiden Geraden sind die Directricen desselben. Das Strahlssystem ist sowohl unter den Systemen  $\Sigma$ , als auch unter den Systemen  $\Sigma_1$  ganz enthalten; es entspricht dem Falle  $p = 0$ , in welchem das Paraboloid in zwei zu einander senkrechte Ebenen,  $x - y = 0$  und  $x + y = 0$ , zerfällt.







eines beliebigen Punktes des Kegelschnittes von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie stehen.

2. Wenn  $g$  eine beliebige Tangente des Kegelschnittes und  $G$  deren Schnittpunkt mit  $u$ , so hat man

$$\begin{aligned} &\text{in der Ebene } \frac{(Ug)}{\sin(gu)(Mg)} = \text{const.}, \\ &\text{auf der Kugel } \frac{\sin(Ug)}{\sin(gu)\sin(MG)} = \text{const.} \end{aligned}$$

3. Es sei  $A$  der Berührungspunkt einer beliebigen Tangente  $g$ ,  $G$  deren Schnittpunkt mit  $u$ ,  $\varrho(A)$  der (ebene oder sphärische) Krümmungshalbmesser des Kegelschnittes im Punkte  $A$ . Dann ist

$$\begin{aligned} &\text{in der Ebene } \frac{\varrho(A) \cdot (MG)^3}{(AG)^3} = \text{const.}, \\ &\text{auf der Kugel } \frac{\lg \varrho(A) \cdot \sin(MG)^3}{\sin(AG)^3} = \text{const.} \end{aligned}$$

Ein specieller Fall ergibt sich, wenn  $u$  eine Tangente des Kegelschnittes ist. Es sei dann  $\varrho(U)$  der Krümmungshalbmesser in ihrem Berührungspunkte  $U$ . Dann ist

$$\frac{\varrho(A) \cdot (UG)^3}{(AG)^3} = \text{const.} = \varrho(U)$$

oder auf der Kugel

$$\frac{\lg \varrho(A) \sin(UG)^3}{\sin(AG)^3} = \text{const.} = \lg \varrho(U)$$

oder

$$\frac{\varrho(A)}{\varrho(U)} = \frac{(AG)^3}{(UG)^3} \quad \text{und} \quad \frac{\lg \varrho(A)}{\lg \varrho(U)} = \frac{\sin(AG)^3}{\sin(UG)^3},$$

d. h.:

„Die Krümmungshalbmesser in zwei beliebigen Punkten  $A$  und  $U$  eines ebenen Kegelschnittes verhalten sich wie die dritten Potenzen der Abschnitte  $(AG)$  und  $(UG)$  der in  $A$  und  $U$  an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten“

und:

„In jedem sphärischen Kegelschnitte verhalten sich die trigonometrischen Tangenten der Krümmungshalbmesser in zwei beliebigen Punkten  $A$  und  $U$  wie die dritten Potenzen der Sinus der Abschnitte  $(AG)$  und  $(UG)$  von den in  $A$  und  $U$  an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten.“

4. Satz 3 kann als ein specieller Fall des folgenden angesehen werden.

$A_1, A_2, A_3$  sind drei beliebige Punkte des Kegelschnittes  $K$ ;  $g_1, g_2, g_3$  die Verbindungslinien der drei Punkte;  $G_1, G_2, G_3$  die Schnittpunkte von  $g_1, g_2, g_3$  mit  $u$ ; endlich ist  $\varrho(A)$  der des um das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  beschriebenen  $K$ .





15. Dasjenige Stück einer veränderlichen Tangente von  $K$ , welches zwischen zwei feste Tangenten desselben Kegelschnittes fällt, wird von  $U$  aus auf  $u$  projecirt. Die Projection erscheint dann, von  $M$  aus gesehen, unter constantem Winkel. (Gilt ebenfalls für die Ebene wie für die Kugel.)

16. Durch einen festen Punkt  $A$  zieht man eine veränderliche Secante, welche den Kegelschnitt in  $A_1$  und  $A_2$  schneidet. Man verbindet  $A_1$  und  $A_2$  mit  $U$  durch zwei Geraden, welche  $u$  in  $G_1$  und  $G_2$  treffen. Endlich sei  $B$  der Schnittpunkt von  $UA$  mit  $u$ . Es findet die Gleichung statt

$$\operatorname{tg} \frac{(B \hat{M} G_1)}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{(B \hat{M} G_2)}{2} = \text{const.}$$

17. Gegeben eine beliebige Gerade  $g$ , welche  $K$  nicht schneidet. Von einem beliebigen Punkte  $A$  derselben zieht man an den Kegelschnitt die Tangenten  $g_1$  und  $g_2$ .  $G$ ,  $G_1$  und  $G_2$  sind die Schnittpunkte von  $u$  mit  $g$ ,  $g_1$  und  $g_2$ . Das Product

$$\operatorname{tg} \frac{(G M G_1)}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{(G M G_2)}{2}$$

ist alsdann unabhängig von der Lage des Punktes  $A$  auf  $g$ .

18. Man hat ein System von  $n$  Punkten  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , welche eine solche Lage zu  $U$  und  $u$  besitzen, dass für jede beliebige durch  $U$  gezogene Gerade  $l$  die Gleichung stattfindet

$$\Sigma \frac{(A_1 l)}{(A_1 u)} = 0$$

oder auf der Kugel

$$\Sigma \frac{\sin(A_1 l)}{\sin(A_1 u)} = 0.$$

Wenn nun  $g$  eine veränderliche Tangente des Kegelschnittes ist, welche  $u$  in  $G$  trifft, so hat man die Beziehung

$$\Sigma \left[ \frac{(A_1 g)}{(A_1 u)} \right] \cdot \frac{1}{\sin(gu) \sin(MG)} = \text{const.},$$

auf der Kugel dagegen

$$\Sigma \left[ \frac{\sin(A_1 g)}{\sin(A_1 u)} \right] \cdot \frac{1}{\sin(gu) \sin(MG)} = \text{const.}$$

19. Bei derselben Annahme, wie im vorhergehenden Satze, sei  $P$  ein veränderlicher Punkt des Kegelschnittes, von welchem aus man die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  auf die Gerade  $u$  nach  $G_1, G_2, \dots, G_n$  projecirt. Die Summe

$$\Sigma \frac{(PA_1)^2 (MG_1)^2}{(Au)^2 (PG_1)^2}$$

oder auf der Kugel



wo  $p$  den am Orte  $xyz$  des Punktes herrschenden Druck,  $u, v, w$  die Geschwindigkeitscomponenten des Punktes bedenten.

Ferner ist jener Stoff eine homogene incompressible Flüssigkeit. Es ergibt sich dadurch die Bedingung

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

für alle Punkte des Raumes ausserhalb der Atome.

Die Bedingung, der  $p$  innerhalb des vom ponderablen Stoffe erfüllten Raumes zu genügen hat, muss man auf verschiedenem Wege ableiten, je nachdem man sich die ponderablen Massen in discreten, verschwindend kleinen Körpern concentrirt oder stetig zusammenhängend denkt. Bei Zugrundelegung der ersteren atomistischen Annahme umschliesse man jedes Atom durch eine kleine Fläche, deren innere Normale  $n$  die Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den Coordinatenrichtungen bilde. Durch das Oberflächenelement  $ds$  der Fläche tritt während der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

$$[(u - x') \cos \alpha + (v - y') \cos \beta + (w - z') \cos \gamma] ds$$

ins Innere ein, wenn  $x', y', z'$  die Geschwindigkeitscomponenten des Atoms bedenten und man die Dichtigkeit der homogenen Flüssigkeit gleich 1 setzt. Da  $x', y', z'$  für alle Elemente der umschliessenden Fläche constant und, die Integrationen über die ganze Fläche erstreckt,

$$\int \cos \alpha \cdot ds = 0, \quad \int \cos \beta \cdot ds = 0, \quad \int \cos \gamma \cdot ds = 0$$

ist, so strömt ins Innere der Fläche in der Zeiteinheit

$$\int (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) ds = - \int \frac{\partial p}{\partial n} ds$$

und der Riemann'schen Hypothese zufolge darf man setzen

$$- \int \frac{\partial p}{\partial n} ds = 4 \pi m,$$

mit  $m$  die Masse des umschlossenen Atoms bezeichnet. Hieraus folgt aber bekanntlich

$$\int \Delta p \cdot d\tau = 4 \pi m,$$

wenn diese Integration über das von der Fläche umschlossene Volum erstreckt wird. Letztere Gleichung bleibt bestehen, wie klein auch die Fläche sei, und liefert daher für den Fall, dass  $m$  in einem Punkte concentrirt ist, für diesen die Bedingung

$$3) \quad \Delta p = 4 \pi m.$$

Bei der Annahme stetiger Erfüllung des Raumes durch die ponderable Masse findet sich die Flüssigkeitsmenge, die in ein mit der ponderablen Masse  $m$  erfülltes Raumelement tritt, ebenfalls gleich

$$- \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \Delta p = 4 \pi m.$$









Die ergänzende Bearbeitung für die frühere Zeit behält sich die Gesellschaft vor, eventuell zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. Preis 700 Mark.

---

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, das auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem 30. November des angegebenen Jahres, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1878 Professor der Geschichte Dr. Georg Voigt) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

---



$$x = x' + a \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}, \quad y = y' \cos \vartheta - z' \sin \vartheta, \quad z = y' \sin \vartheta + z' \cos \vartheta$$

und erhalten, wenn wir die Striche bei den neuen Coordinaten wieder weglassen, seine Gleichung in der Form

$$3) \quad A^2 x^2 + B^2 y^2 - C^2 z^2 = 1$$

und als Gleichungen der Geraden  $g$  und  $h$

$$4) \quad x + \frac{2a\lambda^2}{1 - \lambda^2} = 0, \quad y - \alpha z - (z + \alpha y) \operatorname{tg} \vartheta = 0,$$

$$5) \quad x + \frac{2a}{1 - \lambda^2} = 0, \quad y + \alpha z - (z - \alpha y) \operatorname{tg} \vartheta = 0,$$

wenn die Werthe  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$ ,  $\vartheta$  durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$6) \quad \begin{aligned} A^2 &= \left( \frac{1 - \lambda^2}{2a\lambda} \right)^2, \\ B^2 &= \left( \frac{1 - \lambda^2}{2a\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left( \frac{2\alpha\lambda}{(1 + \alpha^2)(1 - \lambda^2)} \right)^2} \right\}, \\ -C^2 &= \left( \frac{1 - \lambda^2}{2a\lambda} \right)^2 \left\{ \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \left( \frac{2\alpha\lambda}{(1 + \alpha^2)(1 - \lambda^2)} \right)^2} \right\}, \end{aligned}$$

$$7) \quad \operatorname{tg} 2\vartheta = - \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}.$$

Die oben erwähnte Relation ergibt sich unmittelbar aus den Gleichungen 6); sie lautet:

$$8) \quad A^2 = B^2 - C^2.$$

Ferner zeigen die Gleichungen 4) und 5), dass von den beiden Geraden  $g$  und  $h$  die eine die Polargerade der andern in Bezug auf das Hyperboloid ist.

Die durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der Kreisschnitte haben für unsere Fläche die Gleichungen

$$9) \quad Cy - Bz = 0, \quad Cy + Bz = 0;$$

daraus folgt, dass die Kreisschnitte auf je einer der beiden Asymptoten des Hauptschnittes der  $yz$ -Ebene senkrecht stehen.

Ferner zeigen die Gleichungen 6), dass das Verhältniss der Grösse  $A^2$ ,  $B^2$ ,  $C^2$  von  $a$ , d. h. von dem kürzesten Abstände der beiden Geraden  $g$  und  $h$ , unabhängig ist. Setzt man nun  $a = 0$ , so verwandeln sich die Geraden in zwei zu ihnen parallele Geraden  $g'$  und  $h'$ , welche durch den Mittelpunkt des Hyperboloids gehen. Dieses selbst aber wird dadurch zu dem Kegel

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 - C^2 z^2 = 0,$$

d. h. es geht in seinen eigenen Asymptotenkegel über. Folglich kann der Asymptotenkegel unseres Hyperboloids als der Ort aller Punkte des Raumes betrachtet werden, deren Entfernungen von den Geraden  $g'$  und  $h'$  ebenfalls das constante Verhältniss  $\lambda$  besitzen.









Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \end{aligned}$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \end{aligned}$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\sigma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt = 0.$$

$$\sigma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt \end{aligned}$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\sigma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

$$\sigma(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i t} \Gamma(-t)}{\Gamma(t)} dt$$

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel

Die Funktion  $\sigma(u)$  ist die Funktion  $\sigma(u)$  entspricht die Formel





Entfernung des Punktes  $r=0$  der Geraden  $g$  vom Punkte  $r_1=0$  von  $u$ , so gelten folgende Gleichungen:\*

$$r_1 = \frac{d}{\sin^2(ug)} \{ \cos(gd) \cos(ug) - \cos(ud) \},$$

$$= - \frac{d}{\sin^2(ug)} \{ \cos(ud) \cos(ug) - \cos(gd) \}.$$

• nun noch

$$9) \quad \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} = m, \quad \frac{\beta}{B} - \frac{\gamma}{C} = n,$$

$$\frac{\beta}{C} + \frac{\gamma}{B} = p, \quad \frac{\beta}{C} - \frac{\gamma}{B} = q,$$

$$10) \quad \frac{B^2 + C^2}{B^2 - C^2} = \delta^2,$$

so ergibt sich

$$d \cos(gd) = mu,$$

$$d \cos(ud) = -\frac{u}{R} \left( \frac{2\lambda}{A^2} + e^2 + e_1^2 + e_2^2 u^2 \right),$$

$$\cos(ug) = \frac{n - mu^2}{R}, \quad \sin^2(ug) = \frac{R_1^2}{R^2},$$

wo

$$R_1^2 = p^2 + \delta^2(p^2 + q^2)u^2 + q^2u^4$$

ist. Demnach ergeben sich, wenn wir die gefundenen Werthe in die Gleichungen 8) einsetzen und noch folgende Bezeichnungen einführen:

$$11) \quad me_2^2 + n \left( e^2 + e_1^2 + \frac{2\lambda}{A^2} \right) = k, \quad ne_2^2 + m \left( e^2 + e_1^2 - \frac{2\lambda}{A^2} \right) = l,$$

die gesuchten Grössen  $r, r_1$  nach einigen Vereinfachungen in der Form

$$12) \quad r_1 = \frac{u}{R_1^2} \left( \frac{2\lambda}{A^2} + \frac{1}{2} \delta^2 (p^2 + q^2) + q^2 u^2 \right),$$

$$13) \quad r = \frac{u}{R_1^2} (k + lu^2).$$

Setzen wir nun diesen Werth von  $r_1$  in die Gleichungen 6) ein, so erhalten wir die Coordinaten des Punktes  $U$  der Geraden  $u$ , welcher von  $g$  die kürzeste Entfernung hat; es ergibt sich, wenn wir noch

$$p^2 = P, \quad q^2 = Q, \quad \frac{1}{2} \delta^2 (p^2 + q^2) = N, \quad \frac{2\lambda}{A^2} = M$$

setzen,

$$15) \quad Ax = \frac{P - 2Mu^2 - Qu^4}{P + 2Nu^2 + Qu^4},$$

$$By = \frac{P + M + N - (M - N - Q)u^2}{P + 2Nu^2 + Qu^4},$$

$$Cz = \frac{P - M - N - (M - N + Q)u^2}{P + 2Nu^2 + Qu^4}.$$

Betrachten wir nun  $u$  in diesen Gleichungen als variabel, so durchläuft der Punkt  $U$  die Geradenschaar  $u$  des Hyperboloids; daher stellen dieselben die im Eingang des Paragraphen erwähnte Curve dar. Da sich ihre Coordinaten als rationale Functionen eines Parameters ergeben, so folgt, dass die Punkte der Geradenschaar  $u$ , welche von  $g$  den kürzesten Abstand besitzen, eine Curve  $C_4$  vierter Ordnung und zweiter Gattung bilden. Die Geraden  $u$  repräsentiren diejenige Regelschaar des Hyperboloids, welche von  $C_4$  nur je einmal geschnitten wird; dagegen hat jede Gerade  $v$  drei Punkte mit  $C_4$  gemein.

Es giebt zwei Punkte des Hyperboloids, nämlich seine Schnittpunkte mit der  $x$ -Axe, durch welche alle diese Curven  $C_4$  hindurchgehen. Es sind dies diejenigen beiden Punkte, welche für jede Curve den Werthen  $u = 0$  und  $u = \infty$  entsprechen.

Die Coefficienten  $M, N, P, Q$ , welche die Curven  $C_4$  bestimmen, hängen ausser von den Hauptaxen des Hyperboloids von  $\lambda, \beta, \gamma$ , d. h. von der Geraden  $g$  der Fläche  $R_g$  ab. Diese Curven werden sich daher im Allgemeinen mit der Geraden  $g$  ändern; es entsteht jedoch die Frage, ob vielleicht zu mehreren Geraden  $g$  eine und dieselbe Curve  $C_4$  gehört. Dies wird für diejenigen Geraden der Fall sein, welche für alle Werthe von  $u$  denselben Werth von  $\frac{r_1}{R}$  liefern. Nun ist mit Benutzung der Bezeichnungen 14)

$$\frac{r_1}{R} = u \frac{M + N + Qu^2}{P + 2Nu^2 + Qu^4};$$

ferner gehöre zur Geraden  $g'$  der Werth  $r'_1$  und es sei

$$\frac{r'_1}{R} = u \frac{M' + N' + Q'u^2}{P' + 2N'u^2 + Q'u^4},$$

so ist zu untersuchen, ob sich die Grössen  $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$  so bestimmen lassen, dass für alle Werthe von  $u$  die Gleichung

$$\frac{r_1}{R} - \frac{r'_1}{R} = 0$$

besteht. Als Bedingungen ergeben sich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} (M + N)P' - (M' + N')P &= 0, \\ 17) \quad QP' - PQ' + 2(MN' - M'N) &= 0, \\ (M - N)Q' - (M' - N')Q &= 0. \end{aligned}$$

Ersetzen wir in ihnen  $N$  und  $N'$  nach 14) durch  $P, Q, P', Q'$ , so gehen sie in

$$\begin{aligned} MP' - PM' + \frac{1}{2}\delta^2(QP' - PQ') &= 0, \\ 18) \quad \delta^2(M(P' + Q') - M'(P + Q)) + QP' - PQ' &= 0, \\ MQ' - QM' + \frac{1}{2}\delta^2(QP' - PQ') &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt multipliciren wir die erste und dritte derselben mit  $\delta^2$ , die zweite mit  $-1$ , und addiren sie, so erhalten wir



Für zwei solche Geraden  $g$  und  $g'$  ergibt sich noch, dass

$$\frac{\sin^2(ug)}{\sin^2(ug')} = \frac{P + 2Nu^2 + Qu^4}{P' + 2N'u^2 + Q'u^4}$$

oder

$$39) \quad \frac{\sin^2(ug)}{\sin^2(ug')} = \tau = \lambda^2$$

ist, d. h. die Sinus der Winkel, welche irgend eine Gerade des Hyperboloids mit der Fläche  $R_g$  bildet, besitzen ein constantes Verhältniss, welches dem constanten Verhältniss der Entfernungen gleich ist.

Wir bemerken schliesslich, dass die für die Geraden  $u$  gefundenen Gleichungen in die entsprechenden für die Geraden  $v$  übergehen, wenn man  $u$  in  $v$  verwandelt und  $m$  mit  $n$ ,  $p$  mit  $q$  vertauscht.

### § 5. Die Fläche $R_g$ der kürzesten Abstände.

Um die Fläche zu untersuchen, welche von den Geraden  $s$  gebildet wird, deren Erzeugungslinien also die Punkte kürzesten Abstandes  $G$  und  $U$  mit einander verbinden, bestimmen wir jeden Strahl  $s$  durch seine Richtungscosinus  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und seinen Schnittpunkt mit der Geraden  $g$ . Dies ist der Punkt, welcher dem Werthe  $r$  [Gleichung 13), § 4] entspricht; daher sind die Gleichungen des Strahles  $s$

$$1) \quad x + \frac{\lambda}{A} = \alpha_2 s, \quad y = \beta_2 r + \beta_2 s, \quad z = \gamma_2 r + \gamma_2 s.$$

Aus ihnen ergibt sich die Gleichung der gesuchten Fläche durch Elimination von  $u$  und  $s$ . Dieselbe lässt sich ausführen, ohne dass es nöthig wäre, die Grössen  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  zu berechnen. Weil nämlich der Strahl  $s$  auf  $u$  und  $g$  senkrecht steht, so gelten die beiden Relationen

$$2) \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0, \quad \beta \beta_2 + \gamma \gamma_2 = 0.$$

Multipliciren wir daher die Gleichungen 1) mit  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , resp. mit  $\beta, \gamma$ , und addiren sie, so erhalten wir

$$3) \quad \alpha_1 \left( x + \frac{\lambda}{A} \right) + \beta_1 y + \gamma_1 z = (\beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) r,$$

$$4) \quad \beta y + \gamma z = r,$$

d. h. zwei Gleichungen, welche nur noch die Grösse  $u$  enthalten. Aus ihnen bilden wir noch die Gleichung

$$5) \quad \alpha_1 \left( x + \frac{\lambda}{A} \right) + \beta_1 y + \gamma_1 z = (\beta \beta_1 + \gamma \gamma_1) (\beta y + \gamma z)$$

und machen nunmehr folgende Substitution:

$$6) \quad x + \frac{\lambda}{A} = \xi, \quad y = \gamma \eta + \beta \zeta, \quad z = \gamma \zeta - \beta \eta,$$

alsdann verwandeln sich die beiden Gleichungen 4) und 5) in

$$\zeta - r = 0, \quad \alpha_1 \xi + (\gamma \beta_1 - \beta \gamma_1) \eta = 0$$







Umgekehrt hat nach der Definition des Herrn Schroeter die Gleichung des Hyperboloids jedenfalls die Form

$$a^2 A^2 + b^2 B^2 = c^2 C^2 + d^2 D^2$$

und es muss möglich sein, diese Gleichung für unendlich viele Werthe von  $\mu$  und  $\nu$  in

$$a_1^2 \frac{(A + \mu B)^2}{1 + \mu^2} + b_1^2 \frac{(B - \mu A)^2}{1 + \mu^2} = c_1^2 \frac{(C + \nu D)^2}{1 + \nu^2} + d_1^2 \frac{(D - \nu C)^2}{1 + \nu^2}$$

übersuführen, so dass beide Seiten der Gleichungen gesondert in einander übergehen. Diese Forderung aber kann, wie sich leicht ergibt, nur unter der Bedingung

$$a^2 = a_1^2 = b^2 = b_1^2, \quad c^2 = c_1^2 = d^2 = d_1^2$$

erfüllt werden, d. h. die Gleichung des Hyperboloids ist

$$A^2 + B^2 = \lambda^2 (C^2 + D^2).$$

Hiermit ist die Identität beider Definitionen erwiesen.

Die zweite von Herrn Schroeter ebenfalls als charakteristisch angeführte Eigenschaft des Hyperboloids, dass es sich durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugen lässt, deren entsprechende Ebenen senkrecht auf einander stehen, ergibt sich unmittelbar aus der Gleichung

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 - C^2 z^2 = 1$$

und der Relation

$$A^2 = B^2 - C^2.$$

Solcher Paare von Ebenenbüscheln existiren zwei, nämlich

$$By - Cz - \mu(1 - Ax) = 0, \quad By + Cz - \frac{1}{\mu}(1 + Ax) = 0,$$

$$By - Cz - \mu(1 + Ax) = 0, \quad By + Cz - \frac{1}{\mu}(1 - Ax) = 0.$$

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich über das gleichseitige hyperbolische Paraboloid anstellen.

### XIII.

## Ueber die Bedingungen der Aggregatzustandsveränderung.

Von

Prof. Dr. W. C. WITTWER

in Regensburg.

In meiner Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen“,\* habe ich die Principien angegeben, auf welchen die Veränderung des Aggregatzustandes der Körper beruht, und gleichzeitig habe ich auf S. 176 als Beispiel eine Gleichung vom vierten Grade mit willkürlich gewählten Constanten angegeben, um die Art, wie die Aggregatzustandsveränderungen zu Stande kommen, zu zeigen. Im Nachstehenden will ich diese willkürlich gewählte Gleichung mit solchen ver- tauschen, die aus den an verschiedenen Körpern gemachten Beobach- tungen abgeleitet wurden, um mit ihrer Hilfe zu zeigen, dass bei bestimmten Temperaturen eine Veränderung des Aggregatzustandes un- ausbleiblich sei. Die Beweisführung bleibt im Allgemeinen die nämliche, die ich in der obenverwähnten Abhandlung wählte, und die vorgenom- menen Aenderungen sind zunächst im Interesse der grösseren Allgemein- heit gemacht worden.

Die Gleichgewichtsinge der Atome tritt dann ein, wenn die Kräfte, welche je zwei derselben einander zu nähern hier sie von einander zu entfernen streben, sich aufheben.

Eine Annäherung der Atome verursacht der Druck der Luft, der im Nachstehenden mit  $p$  bezeichnet werden soll. Seine Wirkung ist un- abhängig von dem Volumen oder der Atomdistanz des Körpers, denn setzen wir uns letzteren in einen Cylinder mit verschiedenem Deckel- eingesehlossen, welcher letztere als mehr schwer angenommen werden soll, so ist der von der Luft auf die Flächenoberheit der untern Seite des Deckels ausgeübte Druck unabhängig davon, ob der Deckel mehr oder weniger weit zurückgeschoben wird. Ob der eingeschlossene Körper —













Gruppen zu bilden sind, weil dem Anwachsen der Zahl der Theilchen in den grösseren Kugeln bereits durch die Einführung von  $r^3$  Rechnung getragen ist. Der Ausdruck unter den eckigen Klammern in 33) ist jedenfalls positiv, denn sonst wäre die vorausgesetzte Atomgruppierung keine solche des Gleichgewichts. Setzt man den Coefficienten von  $x^3$  in 33) gleich  $2\psi$ , so wird analog der Gleichung 13)

$$34) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2\psi x^3$$

und daraus

$$35) \quad V^2 - v^2 = \psi x^4.$$

Der grösste Werth von  $x$ , bei dem  $V=0$  wird, ist

$$36) \quad x_0 = \sqrt[4]{\frac{V^2}{\psi}}.$$

Wird statt  $v^2$  in 35) sein Werth  $\frac{\partial x^2}{\partial t^2}$  gesetzt, so wird

$$37) \quad \partial t = \frac{\partial x}{V \sqrt{1 - \frac{\psi x^4}{V^2}}}.$$

In dieser Gleichung ist nun  $x = \cos \vartheta \sqrt[4]{\frac{V^2}{\psi}}$  zu setzen und es wird dann

$$\begin{aligned} 38) \quad t &= -\frac{1}{\sqrt[4]{4V^2\psi}} \int \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{2}}}, \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \frac{25}{16384} + \dots\right) \frac{1}{\sqrt[4]{4V^2\psi}}, \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{A}{\sqrt[4]{4V^2\psi}}, \end{aligned}$$

wenn  $A$  gleich der Summe der Reihe gesetzt wird.

Die nach dem Radius gerichtete Componirende der Wirkung, welche das schwingende Theilchen seinerseits von den Punkten  $\pm x$  aus auf ein äusseres Theilchen ausübt, dessen Radius mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\gamma$  macht, ist angegeben durch

$$39) \quad w_1 = -\frac{\alpha(r \pm x \cos \gamma)}{(r^2 \pm 2rx \cos \gamma + x^2)^{3/2}}.$$

Da das Theilchen nun, wie vorausgesetzt, abwechselnd in der  $X$ -,  $Y$ - und  $Z$ -Axe sich bewegt, so wird die in der Richtung des Radius thätige Componirende der Wirkung in den Fällen, dass das Theilchen sich in  $\pm y$  und  $\pm z$  befindet, ausgedrückt durch

$$\frac{-\alpha(r \pm y \cos \kappa)}{(r^2 \pm 2ry \cos \kappa + y^2)^{3/2}} \quad \text{und} \quad \frac{-\alpha(r \pm z \cos \chi)}{(r^2 \pm 2rz \cos \chi + z^2)^{3/2}}.$$

Wird nun  $x=y=z$  gesetzt und in Reihen entwickelt, so wird nach Addition sämtlicher sechs Fälle



$$45) \quad W_1 = - \left( M + \frac{K\tau L}{r^3} \right),$$

wobei

$$\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3} + \dots = M,$$

$$\frac{n+1}{16\pi n} = K,$$

$$r^2 = \tau,$$

$$1 + \left( \frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n} \right) \frac{n-2}{n-2} \cdot \frac{\beta}{\alpha r^{n-2}} + \dots = L$$

gesetzt sein soll. Ausserdem soll versuchsweise  $\tau$  als der absoluten Temperatur gleich gesetzt werden. Es ist dieses zur Zeit eine willkürliche Annahme, deren Richtigkeit oder, wenn man will, Genauigkeit der Vergleichen der Resultate von Rechnung und Beobachtung überlassen bleiben mag.

Werden nun die verschiedenen zwischen zwei Moleculen thätigen Kräfte zusammengekommen, so hat man den Luftdruck  $p$  und den Aetherdruck  $\Delta r$ , welche die Molecule einander zu nähern suchen, während die Molecularthätigkeit  $M$ , die durch die Temperaturwirkung  $\frac{K\tau L}{r^3}$  verstärkt ist, die Molecule von einander entfernen würde. Für den Gleichgewichtszustand muss

$$p + \Delta r - M - \frac{K\tau L}{r^3} = 0,$$

$$46) \quad (M - p - \Delta r) \frac{r^3}{K L} + \tau = 0$$

oder

$$47) \quad F(r) + \tau = 0$$

Wenn sich  $\tau$  um  $\Delta \tau$  ändert, so ändert sich  $r$  um  $\Delta r$  und 47) geht über in

$$48) \quad F(r) + F'(r) \Delta r + F''(r) \frac{\Delta r^2}{2} + \dots + \tau + \Delta \tau = 0.$$

Wird der Einfachheit wegen für  $F'(r)$ ,  $F''(r)$ , ...  $a$ ,  $b$ , ...,  $l$ ,  $m$ , für  $\Delta r$  aber  $x$  gesetzt, so wird

$$49) \quad m x^m + l x^{m-1} + \dots + b x^2 + a x + \tau + \Delta \tau = 0.$$

Diese Gleichung entspricht genau der Gleichung 76) in meiner Abhandlung „Ueber die Art der Bewegung u. s. w.“. Es ist nur in der gegenwärtigen Gleichung die Ableitung insofern eine allgemeinere, als ich hinsichtlich der gegenseitigen Einwirkung der Molecule weiter gar Nichts vorausgesetzt habe, als dass dieselbe eine Function der Entfernung sei. Annahmehalber habe ich statt einer bestimmten Richtung der Schwingungen vorausgesetzt, dass letztere in allen möglichen Richtungen vor sich gehen können, was wenigstens bei den nicht krystallisirten Körpern der Natur entsprechen dürfte.

In 49)  $m$  gross genug, so kann für die jeweiligen Werthe von  $\Delta \tau$  von  $\tau$  mit entsprechender Genauigkeit bestimmt werden. Wird



ernen sich also in der That nicht. Vergleicht man den berechneten Siedepunkt:  $128,754^\circ$  mit dem beobachteten  $78,4^\circ$ , so ist allerdings eine grosse Differenz vorhanden: man kann sich aber dem Beobachtungsergebnisse nähern.

Wenn die Beobachtungen von  $25^\circ$ ,  $50^\circ$  und  $75^\circ$  zur Bestimmung der Constanten verwendet so erhält man die Gleichung

$$32 \quad 172884,7x^3 - 5334,15x^2 - 2905,223x + \Delta\tau = 0.$$

Wenn diese Gleichung nach  $x$  und  $\Delta\tau$  differentiirt und  $\frac{\partial \Delta\tau}{\partial x} = 0$  gesetzt, so ergiebt sich

$$33 \quad x^2 - 115,444072x - 0,00941203 = 0,$$

und daraus liest man ab, dass  $x$  bei  $0,07370231$  einen extremen Werth erhält. Voraus setzt man der Siedepunkt zu  $127,656^\circ$  ergiebt, welcher schon dem Beobachtungsergebnisse schon bedeutend genähert ist.

Wenn die Beobachtungen  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $75^\circ$  zusammengekommen, so erhält man die Gleichung

$$34 \quad 125411,94x^5 - 12507,750x^4 + 539195,0x^3 + 2515,61x^2 - 2880,396x + \Delta\tau = 0.$$

Hier wird  $x$  imaginär, wenn  $\Delta\tau = 115,366^\circ$ , und der berechnete Siedepunkt hat sich also dem beobachteten abermals genähert.

Es dürfte nun wohl die Erwartung berechtigt sein, dass bei Fortsetzung des Verfahrens Rechnung und Beobachtung endlich zusammenfallen, doch ist der Grad der hierzu nöthigen Gleichung wohl ein ziemlich hoher. Ich habe Abstand genommen, in der Rechnung weiter zu gehen, weil ich fürchte, dass die unvermeidlichen Fehler der Beobachtung das Resultat am Ende sehr fraglich machen würden.

Bei Zusammenstellung der Beobachtungen  $20^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $75^\circ$  ergiebt sich die Gleichung

$$35 \quad 1818198x^4 - 322923,1x^3 - 4554,00x^2 + 2886,203x - \Delta\tau = 0.$$

Diese Gleichung giebt keinen Siedepunkt, denn sie hat keinen grössten Werth von  $x$ .

Die oben angegebenen Volumina des Alkohols sind das Mittel aus den Beobachtungsergebnissen. Für  $75^\circ$  erhielt Kopp 1,05956, 1,08971 und 1,09487. Nehmen wir den Fall, letztere Beobachtung sei die einzige und wir verbinden mit ihr die obigen Beobachtungen von  $20^\circ$ ,  $40^\circ$  und  $60^\circ$  combinirt, so ergiebt sich die Gleichung

$$36 \quad 1107440x^4 - 167282,6x^3 - 6622,76x^2 + 2894,301x - \Delta\tau = 0,$$

und aus diesem berechnet sich der Siedepunkt des Alkohols zu  $120,86^\circ$ .

Man frage, bei welcher das Imaginärwerden von  $x$  eintritt, liegt also

ab die verschiedenen Beobachtungsergebnisse. Ich muss übrigens

bedenken, dass aller Wahrscheinlichkeit nach die Thermometer-  
gleichungen sind, je nachdem man sie weiter oben oder

unten. Das Gleichgewicht dehnt sich ungleichmässig aus und









$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$$

$$-r + \Delta r = 0.$$

Die hier abgeleiteten Bedingungen ab-  
geleitet, so dass die Abstände und Aus-  
drücke für die Abstände dieser  
Abstände mit der vorstehende

### Die Molekulartheorie des Lichts

Die Erscheinung der Erscheinung  
veranlasst: die Erscheinung des Körpers,  
die Erscheinung der Erscheinung  
andere Erscheinung imaginär

Die Erscheinung der Erscheinung  
Wenn nun  
die Erscheinung werden  
eine zweite  
die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung

Die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung

Die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung

Die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung  
die Erscheinung der Erscheinung







## Ueber die Bedingungen etc.

..... mit 115' bezüht, so wird  
.....

..... nur dem Resultate von  
..... 162,92°, 160,33°,  
..... Werte sind wenig von  
..... mit der Beobachtung,  
..... wenn die Beobachtung  
..... und Beobach-  
..... in Rechnung  
..... beobachteten in  
..... nimmt, welche  
..... Trimmung der Aus-

..... die  
..... liegen,  
..... Es ist eher darauf  
..... zeigen, als dass  
..... von selbst,  
..... Punkte bestimmen  
..... die Curve

..... Punkt bei den  
..... beobachteten  
..... Phosphor. Nach  
..... 40°  
..... nur um  
..... als sie bei vollstän-  
..... Verbindung mit  
..... statt von 44°.  
..... leugnen lassen.  
..... angegebenen  
..... Zufall  
..... Phosphors nur solche  
..... der Rech-  
..... wie das ab-

..... dass sich ein Körper  
..... je regelmässiger  
..... bei dem Phosphor gegeben.  
..... genügt sie mir darum



111

13.

14.

15.

ei

vi

vo

tu

zi

de

ne

de

zu

wa

zu

d

de

w

di

v

a

K

g

ci

d

d

d

V

s

K

~~\_\_\_\_\_~~ ~~\_\_\_\_\_~~ ~~\_\_\_\_\_~~ ~~\_\_\_\_\_~~

~~\_\_\_\_\_~~ ~~\_\_\_\_\_~~

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

~~\_\_\_\_\_~~

~~\_\_\_\_\_~~  
~~\_\_\_\_\_~~  
~~\_\_\_\_\_~~

\_\_\_\_\_ der  
\_\_\_\_\_ diejenige  
\_\_\_\_\_ liegt mit W,  
d.e





selben in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) aufstellen, nämlich die der quadratischen Polarfläche  $P_{k1}$

$$\xi_1 x_1^2 - \xi_2 x_2^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 - 2\xi_4 x_1 x_4 = 0$$

und die der Tangentiale  $T_k$

$$\xi_1^2 x_1 - \xi_2^2 x_2 - 2\xi_3 \xi_4 x_3 + 2\xi_4 \xi_1 x_4 = 0.$$

2) ~~Die quadratische Polarfläche~~ Aus der Gleichung 3) folgt: Die ~~quadratische Polarfläche~~ des Punktes  $k$  bezüglich einer ~~quadratischen Fläche~~ ist eine windschiefe Fläche zweiter Ordnung, welche die Doppellinie  $D$  in sich enthält.

Die ~~Flächen~~  $W$  und  $W'$  gestalten sich in folgender

Vorge

Die Fläche  $P_{kq}$  bezüglich  $W$  ist ein hyperbolisches Pa-

radoloid, dessen Axe in der

Geraden  $x_2=0, x_3=0$  liegt;

desselbe geht durch die un-

endlichferne Doppellinie und

wird von der Ebene  $x_4=0$

berührt.

Ein System von Geraden auf

dem Paraboloid ist der Ebene  $x_3=0$

parallel; die zu diesem System ge-

hörigen, in der Ebene  $x_3=0$  lie-

genden Gerade entspricht den Gleich-

ungen

Ein System von Geraden auf dem Paraboloid ist der Ebene  $x_3=0$  parallel; die zu diesem System gehörigen, in der Ebene  $x_3=0$  liegenden Gerade entspricht den Gleich-

$$\xi_1 x_1 + 2\xi_4 x_1 = 0, \quad x_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich:

Die windschiefe Fläche 1) wird von der angehörigen quadratischen Polarfläche  $P_{k1}$  in der Linie  $D$  noch in einer Raumkurve 2. Ordnung geschnitten, deren Projection auf die Ebene  $x_3=0$

$$2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0$$

















indicatorischen Linie führt, kann als ein Kegelschnitt und die sehr kleine Schnittfigur, welche von der Tangentialebene gebildet wird, als demselben gleichartig betrachtet werden. Je nachdem demnach die indicatorische Linie eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wird der Punkt  $f$  als ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt der Fläche  $U$  bezeichnet.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Tangentialebene an einem parabolischen Punkte einer Fläche als eine stationäre Tangentialebene zu betrachten ist, da sie die Fläche in zwei aufeinander folgenden Punkten berührt.\*

Da die quadratische Polarfläche eines parabolischen oder Wendepunktes der Fläche  $U$  bezüglich derselben ein Kegel ist,\*\* so ist der geometrische Ort aller parabolischen Punkte die Curve, in der die Fläche  $U$  von ihrer Hesse'schen Fläche geschnitten wird. Diese Schnittcurve führt den Namen: „die parabolische Curve“ der Fläche  $U$ .

Die parabolische Curve einer windschiefen Fläche 1) entspricht demnach den Gleichungen

$$16) \quad x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0, \quad x_3^2 x_4^2 = 0;$$

die Schnittcurve dieser Flächen besteht aus der doppelten Leitlinie und den beiden doppelten Erzeugenden der windschiefen Fläche.

Legt man durch einen beliebigen Punkt  $k$  eine Tangentenebene an eine windschiefe Fläche 1), so liegt der Berührungspunkt derselben zugleich auf der quadratischen Polarfläche  $P_k q$ , d. h. auf der Schnittcurve der beiden Flächen 1) und 3). Ist ein Punkt dieser Schnittcurve ein parabolischer Punkt der Fläche 1), so wird die Tangentenebene an diesem Punkte eine stationäre sein.

Daraus ergibt sich:

Die Schnittpunkte der windschiefen Fläche, der Hesse'schen Fläche und der quadratischen Polarfläche  $P_k q$  sind die Berührungspunkte der stationären Tangentenebenen, die sich von  $k$  aus an die windschiefe Fläche legen lassen.

Die Coordinaten der Berührungspunkte sind demnach bestimmt durch die Gleichungen

$$x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2 = 0, \quad \xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0, \quad x_3^2 x_4^2 = 0.$$

**9. Der Tangentenkegel.** Von einem Punkte  $k$  seien alle möglichen Tangenten an eine windschiefe Fläche 1) gezogen. Der geometrische Ort aller dieser Tangenten ist ein der Fläche umschriebener Kegel, dessen Tangentenebenen zugleich Tangentenebenen der windschiefen Fläche sind. Bekanntlich liegen die Berührungspunkte der Tangenten

\* Salmon, Analyt. Geom. d. Raumes S. 11.

†, a. a. O. S. 23.



$$19a) (\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4)^2 (\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2 \xi_3 x_3 + 2\xi_1 \xi_4 x_4)^2 \\ - 4(x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2)(\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2 \xi_3 x_3 + 2\xi_1 \xi_4 x_4)^3 = 0$$

oder

$$19b) \begin{cases} (\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2 - 2\xi_2 \xi_3 x_3 + 2\xi_1 \xi_4 x_4)^2 = 0, \\ (\xi_3 x_4 - \xi_4 x_3)^2 = 0, \\ 4\xi_3^4 x_1 x_2 - 4\xi_1 \xi_3^3 \xi_4 x_1 x_4 - 4\xi_1 \xi_3^3 x_2 x_3 + \xi_1^2 (\xi_4 x_3 + \xi_3 x_4)^2 = 0. \end{cases}$$

Liegt also der Punkt  $k$  auf der windschiefen Fläche selbst, so besteht der Tangentenkegel aus der Doppelebene, die den Punkt  $k$  und die doppelte Directrix in sich enthält, aus zwei Ebenen, die mit der Tangentenebene am Punkte  $k$  zusammenfallen, und einem Kegel zweiter Ordnung.

Verlegt man den Punkt  $k$  in die einfache Leitlinie  $x_1 = 0, x_2 = 0$  einer windschiefen Fläche 1), so nehmen die Gleichungen 19b) die Gestalt an:

$$20) (\xi_4^2 x_1 - \xi_3^2 x_2)^2 = 0, (\xi_4 x_3 - \xi_3 x_4)^2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 0.$$

Der Tangentenkegel besteht demnach in diesem Falle aus sechs Ebenen, von denen zwei den Punkt  $k$  und die doppelte Directrix in sich enthalten, zwei mit der Doppeltangentenebene am Punkte  $k$ , eine mit der Ebene  $x_1 = 0$  und eine mit der Ebene  $x_2 = 0$  zusammenfallen.

Lässt man den Punkt  $k$  in die Doppellinie einer windschiefen Fläche 1) fallen, so verschwindet die Gleichung 18) vollständig. Verlegt man endlich den Punkt  $k$  in eine singuläre Erzeugende einer windschiefen Fläche 1), so besteht der Tangentenkegel aus vier Ebenen, welche paarweise mit den Coordinatenebenen zusammenfallen, die sich in dieser Erzeugenden schneiden, und einem Kegel zweiter Ordnung.

10. Die Inflexionstangenten, welche sich an eine windschiefe Fläche 1) von einem Punkte ausserhalb derselben ziehen lassen. Nach 6γ) schneidet die Polarebene  $P_f e$  die quadratische Polarfläche  $P_f q$ , falls der Punkt  $f$  auf der windschiefen Fläche liegt, in den beiden Inflexionstangenten der letzteren. Nimmt man auf einer dieser Schnittlinien einen Punkt  $k$  mit den Coordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  als bekannt an, so muss der Berührungspunkt der Inflexionstangente, die sich von  $k$  aus an die windschiefe Fläche legen lässt, nach 5) sowohl auf der Polarebene  $P_k e$ , als auf der quadratischen Polarfläche  $P_k q$  liegen. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind demnach bestimmt durch die Gleichungen 1), 3) und 4).\*

a) Führt man in die Gleichungen 1), 3), 4)  $x, y, z$  für die Quotienten  $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \frac{x_4}{x_1}$  und  $\xi, \eta, \zeta$  für  $\frac{\xi_2}{\xi_1}, \frac{\xi_3}{\xi_1}, \frac{\xi_4}{\xi_1}$  ein, so erhält man durch Elimination von  $x$  und  $z$

















neun Punkten schneiden und die synthetische Geometrie hat nicht mehr nöthig, diese Sätze der analytischen Geometrie zu entlehnen. — Um jenen Beweis zu führen, werden aber einige Sätze von den harmonischen Mittelpunkten gebraucht, die zunächst auf geometrischem Wege abgeleitet werden sollen. Dazu reichen einige Eigenschaften vom ebenen Dreieck aus.

Zuerst sei der bekannte Satz angeführt: „Wenn man durch einen Punkt  $O$  in der Ebene eines Dreiecks  $ABC$  mit den Seiten  $abc$  drei Transversalen  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  zieht, zu ihren Durchschnitten  $\alpha\beta\gamma$  mit  $abc$  die harmonischen Gegenpunkte  $\alpha'\beta'\gamma'$  in Bezug auf die Ecken sucht, so liegen dieselben in einer Geraden  $g$  und umgekehrt. Man nennt  $g$  die gerade Polare von  $O$  und  $O$  den Pol von  $g$  bezüglich der dreiseitigen Curve  $(abc)$ .

Durch einen Punkt  $P$  seien die Geraden  $gg_1g_2\dots$  gelegt; ihre Schnittpunkte mit den Seiten  $abc$  seien  $\alpha'\beta'\gamma'$ ,  $\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1$ ,  $\alpha'_2\beta'_2\gamma'_2$ ,  $\dots$ , deren harmonische Gegenpunkte bezüglich der Ecken mit  $\alpha\beta\gamma$ ,  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ,  $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ ,  $\dots$  bezeichnet werden mögen. Da die Punktreihen  $\alpha'\alpha'_1\alpha'_2\dots$ ,  $\beta'\beta'_1\beta'_2\dots$ ,  $\gamma'\gamma'_1\gamma'_2\dots$  in perspectivischer Lage sich befinden, so müssen die Punktreihen  $\alpha\alpha_1\alpha_2\dots$ ,  $\beta\beta_1\beta_2\dots$ ,  $\gamma\gamma_1\gamma_2\dots$  und daher auch die Strahlenbüschel  $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\dots)$ ,  $B(\beta\beta_1\beta_2\dots)$ ,  $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\dots)$  in projectivischer Beziehung stehen. Je drei entsprechende Strahlen, wie  $A\alpha$ ,  $B\beta$ ,  $C\gamma$ ;  $A\alpha_1$ ,  $B\beta_1$ ,  $C\gamma_1$ ,  $\dots$ , schneiden sich stets in einem Punkte  $O$ ,  $O_1$ ,  $\dots$ , dem Pol der Geraden  $g$ ,  $g_1$ ,  $\dots$ , deshalb erzeugen die drei Büschel einen Kegelschnitt  $\pi$ , der durch  $ABC$  geht und die conische Polare von  $P$  bezüglich der dreiseitigen Curve  $(abc)$  heisst.

Dem Strahl  $AC$  des Büschels  $A(\alpha\alpha_1\alpha_2\dots)$  entspricht im Büschel  $C(\gamma\gamma_1\gamma_2\dots)$  der Strahl  $CF'$ , der  $CP$  von  $CA$  und  $CB$  harmonisch trennt. Daher berührt  $\pi$  in  $C$  den Strahl  $CF'$  und ebenso in  $A$  und  $B$  die Strahlen  $AA'$  und  $BB'$ , welche  $AP$  und  $BP$  von  $AB$  und  $AC$ , resp.  $BA$  und  $BC$  harmonisch trennen.

Die conische Polare  $\pi$  von  $P$  enthält also die Pole  $OO_1O_2\dots$  sämtlicher durch  $P$  gelegten Geraden  $gg_1g_2\dots$  und daraus folgern wir: „Liegt ein Punkt  $O$  auf der conischen Polare  $\pi$  eines Punktes  $P$  bezüglich der dreiseitigen Curve  $(abc)$ , so liegt  $P$  auf der geraden Polare  $g$  von  $O$  und umgekehrt.

Weiter lässt sich leicht nachweisen, dass die gerade Polare  $p$  eines Punktes  $P$  bezüglich der dreiseitigen Curve  $(abc)$  zusammenfällt mit der Polare von  $P$  bezüglich seiner conischen Polare  $\pi$ . Die Transversalen  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  mögen die Seiten  $abc$  in  $AB\Gamma$  schneiden; dann berührt  $\pi$  in  $A$  die Geraden  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CF'$ , welche  $AA$ ,  $BB$ ,  $CF$  von  $AB$  und  $BA$  und  $BC$ ,  $CA$  und  $CB$  harmonisch trennen. Die Polaren von  $BB$ ,  $CF$ ; diese schneiden sich in Pol  $P$  von  $AB\Gamma$



Mittelpunkte folgt daraus: Der harmonische Mittelpunkt ersten Grades  $R'$  von  $RST$  für  $R$  als Pol ist  $R$  selbst; von den harmonischen Mittelpunkten zweiten Grades der Punkte  $RST$  für  $R$  als Pol fällt der eine  $R_1$  mit  $R$  zusammen; der andere  $R_2$  trennt  $R$  von  $S$  und  $T$  harmonisch.

Diese Sätze genügen, um den Beweis des obenerwähnten Satzes zu führen.

Auf die von Cremona angegebene Art lassen sich jetzt einige Sätze von der Polaren irgend einer ebenen Curve dritter Ordnung ableiten. — Es sei  $K^3$  irgend eine ebene Curve dritter Ordnung,  $P$  ein beliebiger Punkt,  $u$  eine variable Gerade durch ihn, welche  $K^3$  in  $XYZ$  schneidet; dann sind die harmonischen Mittelpunkte  $P'$  des ersten Grades und  $P_1P_2$  des zweiten Grades der Punkte  $XYZ$  für  $P$  als Pol auch variabel. Der Ort aller Punkte  $P'$  ist eine Gerade  $p$ , der Ort aller Punkte  $P_1P_2$  ist ein Kegelschnitt  $\pi$ ; dann heisst  $p$  die gerade Polare und  $\pi$  die conische Polare von  $P$  bezüglich  $K^3$ . — Liegt  $P$  auf  $K^3$ , so muss seine conische Polare  $\pi$  je zwei mit  $P$  in gerader Linie liegende Curvenpunkte harmonisch trennen und daher  $K^3$  in  $P$  berühren. Deshalb muss auch die gerade Polare  $p$  von  $P$ , falls  $P$  auf  $K^3$  liegt, diese Curve in  $P$  berühren.

Auf einer Geraden  $g$  seien  $ABCD\dots$  beliebige Punkte,  $\alpha\beta\gamma\delta\dots$  ihre conischen Polaren in Bezug auf  $K^3$ ,  $LMNO$  die Schnittpunkte von  $\alpha$  und  $\beta$ , dann muss die gerade Polare eines jeden dieser vier Schnittpunkte durch  $A$  und  $B$  gehen, also  $g$  sein; weiter muss  $\gamma$  durch  $LMNO$  gehen, denn zieht man  $CM$ , so ist  $C$  der harmonische Mittelpunkt des ersten Grades für die Schnittpunkte von  $CM$  mit  $K^3$  in Bezug auf  $M$  als Pol, also muss  $M$  ein harmonischer Mittelpunkt des zweiten Grades derselben Schnittpunkte für  $C$  als Pol sein. Die conischen Polaren  $\alpha\beta\gamma\delta\dots$  aller Punkte  $ABCD\dots$  einer Geraden  $g$  schneiden sich in denselben vier Punkten  $LMNO$ , welche die Pole von  $g$  bezüglich  $K^3$  sind.

Sind  $EFK$  irgend drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, so lässt sich zeigen, dass das Netz von Kegelschnitten, welches durch die drei conischen Polaren  $\eta\varphi\kappa$  jener Punkte bezüglich  $K^3$  bestimmt wird, alle conischen Polaren der Curve  $K^3$  enthält. Sind  $QQ_1$  zwei beliebige Punkte, so giebt es im Netze  $(\eta\varphi\kappa)$  einen einzigen Kegelschnitt, der durch diese Punkte geht. (Vergl. Schroeter, Steiner's Vorlesungen.) Um ihn zu finden, wähle man aus den beiden Kegelschnittbüscheln  $(\eta\varphi)$  und  $(\varphi\kappa)$  diejenigen Kegelschnitte  $\mu$  und  $\nu$ , welche durch  $Q$  gehen, und wähle ferner im Büschel  $(\mu\nu)$  denjenigen Kegelschnitt  $\varrho$ , welcher durch  $Q_1$  geht, so ist dieser der verlangte. — Die gerade Polare von  $Q$  bezüglich  $K^3$  sei  $q$ , dann liegen die Pole aller conischen Polaren in  $K^3$  durch  $Q$  gehen, auf  $q$ ; deshalb müssen diese conischen Polaren  $q$  bilden. In diesem giebt es einen Kegelschnitt, der



büschel  $(ABCD)$  und das projectivische Strahlenbüschel  $M$  erzeugt wird, so wird auch  $C^3$  durch diese beiden Büschel erzeugt und es folgt:

„Sind  $ABCD$  irgend vier Punkte einer Tripelcurve  $C^3$ , so schneidet ein variabler Kegelschnitt  $\kappa$  durch dieselben  $C^3$  in zwei variablen Punkten  $XY$ , deren Verbindungslinie durch einen festen Punkt  $M$  geht. Das Kegelschnittbüschel  $(ABCD)(\kappa, \dots)$  ist dabei in projectivischer Beziehung mit dem Strahlenbüschel  $M(XY, \dots)$ .“

Aus diesem Satze folgt:

„Jede Tripelcurve ist durch neun ihrer Punkte im Allgemeinen vollständig und eindeutig bestimmt.“

Zwei Tripelcurven schneiden sich höchstens in neun Punkten.“

Die Hesse'sche Curve der Tripelcurve  $C^3$  sei  $\mathfrak{C}^3$ ; da sie ebenfalls eine Tripelcurve ist, so schneidet sie die erstere in neun Punkten, die für dieselbe Wendepunkte sind. Wir bezeichnen sie mit  $WW_1 \dots W_7 W_8$ . In  $W$  und  $W_1$  denken wir uns je drei Punkte  $STU$  und  $S_1 T_1 U_1$  in gerader Linie vereinigt, dann müssen die drei Schnittpunkte  $S_2 T_2 U_2$  von  $SS_1, TT_1, UU_1$  mit  $C^3$  in einer Geraden liegen und da sie in einen Punkt zusammenfallen, so muss dieser ein Wendepunkt sein und daher geht jede Gerade, welche zwei Wendepunkte verbindet, noch durch einen dritten.

Mit  $W$  mögen noch in einer Geraden liegen die Wendepunkte  $W_1 W_2, W_3 W_4, W_5 W_6, W_7 W_8$ ; jedes dieser vier Paare wird durch die Gerade  $w_1$  von  $W$  harmonisch getrennt, daher muss die conische Polare von  $W$  bezüglich  $\mathfrak{C}^3$  auch ein Geradenpaar sein, dessen einer Theil  $w_1$  ist; der andere Theil  $w$  berührt  $\mathfrak{C}^3$  in  $W$  und kann ausser  $W$  mit  $\mathfrak{C}^3$  keinen Punkt gemeinschaftlich haben. Deshalb ist  $W$  ein Wendepunkt auch von  $\mathfrak{C}^3$ . Daraus folgt:

„Eine Tripelcurve und ihre Hesse'sche Curve schneiden sich in neun Punkten, die für beide Curven Wendepunkte sind.“

Vorher fanden wir, dass alle Schnittpunkte einer Curve  $K^3$  dritter Ordnung und ihrer Hesse'schen Curve  $\mathfrak{K}^3$  Wendepunkte der ersten sind; wir wollen zunächst zeigen, dass sie auch Wendepunkte der zweiten sind.

Es seien  $WW_1$  zwei Wendepunkte von  $K^3$ , es sei ferner  $S$  der Schnittpunkt von  $WW_1$  mit  $\mathfrak{K}^3$ . Die conischen Polaren aller Punkte von  $WW_1$  bezüglich  $K^3$  bilden ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte  $LMNO$  seien. In diesem Büschel sind drei Geradenpaare vorhanden, die conischen Polaren von  $WW_1 S$ . Wenn  $ww'$  und  $w_1 w'_1$  die Wendetangenten und harmonischen Polaren von  $W$  und  $W_1$  sind, so mögen sich  $w$  und  $w_1$  in  $L$ ,  $w$  und  $w'_1$  in  $M$ ,  $w'$  und  $w_1$  in  $N$ ,  $w'$  und  $w'_1$  in  $O$  treffen. Da das Kegelschnittbüschel  $(LMNO)$  zu den Kegelschnittbüscheln des Netzes der conischen Polaren von  $K^3$  gehört, so sind die drei Tripelpunkte desselben drei Punkte von  $\mathfrak{K}^3$  und bilden auf  $\mathfrak{K}^3$  ein Tripel; ihre Punkte müssen in einer Geraden liegen und sind  $WW_1 S$ .





die Grundpunkte beider Büschel solche Wendepunkte sind, die zweimal zu je dreien in einer Geraden liegen.“

Da eine Tripelcurve erst durch neun ihrer Punkte bestimmt ist, so lassen sich durch acht Punkte unzählig viele Tripelcurven legen, und zwar schneiden sich alle noch in demselben neunten Punkte. Es seien die Tripelcurven  $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \dots$  durch die acht Punkte  $AB C D E F G H$  gelegt, dann liegen alle Punkte  $X$  von der Beschaffenheit, dass das Strahlenbüschel  $X(EFGH)$  in projectivischer Beziehung mit dem Kegelschnittbüschel  $(ABCD)\{EFGH\}$  steht, auf einem Kegelschnitte  $\mathfrak{R}$ , oder mit anderen Worten: die gegenüberliegenden Punkte  $MM_1M_2 \dots$  der Punkte  $ABCD$  in den verschiedenen Curven  $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \dots$  liegen auf  $\mathfrak{R}$ ; die Curve  $\mathfrak{C}^3$  schneidet  $\mathfrak{R}$  in  $EFGHM$  und noch in einem sechsten Punkte  $J$ , dann muss dem Strahl  $MJ$  der Kegelschnitt entsprechen, der durch die fünf Punkte  $ABCDJ$  bestimmt ist; diesem müssen auch die Strahlen  $M_1J$ ,  $M_2J$ , ... entsprechen, da die Büschel  $M(EFGHJ\dots)$ ,  $M_1(EFGHJ\dots)$ ,  $M_2(EFGHJ\dots)$ , ... und  $(ABCD)\{EFGHJ\dots\}$  in projectivischer Beziehung stehen. Also schneiden sich alle Tripelcurven  $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \mathfrak{C}_2^3 \dots$  noch in  $J$ .

$K^3$  sei wieder eine beliebige Curve dritter Ordnung,  $\mathfrak{C}^3$  ihre Hesse'sche Curve,  $\mathfrak{C}_1^3$  wieder deren Hesse'sche Curven, so schneiden sich diese drei Curven in ihren neun gemeinschaftlichen Wendepunkten  $WW_1 \dots W_7 W_8$ . Durch die acht Punkte  $WW_1 \dots W_6 W_7$  denken wir uns alle Tripelcurven  $\mathfrak{C}_2^3 \mathfrak{C}_3^3 \dots \mathfrak{C}_\infty^3$  gelegt, so müssen diese alle noch durch  $W_8$  gehen und haben sämmtlich dieselben neun Wendepunkte. — Mit  $W$  mögen in gerader Linie liegen  $W_1 W_2$ ,  $W_3 W_4$ ,  $W_5 W_6$ ,  $W_7 W_8$ . Wir wählen  $W_1 W_2 W_3 W_4$  zu Grundpunkten eines Kegelschnittbüschels und erzeugen durch dieses und durch ihre projectivischen Strahlenbüschel in  $W$  alle Curven  $K^3 \mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \dots \mathfrak{C}_\infty^3$ . In allen diesen projectivischen Büscheln entsprechen den Geradenpaaren  $(W_1 W_3, W_2 W_4)$  und  $(W_1 W_4, W_2 W_3)$ , deren Gerade durch  $(W_5, W_6)$  und  $(W_7, W_8)$  gehen, die Geraden  $WW_5 W_6$  und  $WW_7 W_8$ . Dem Geradenpaar  $(W_1 W_2, W_3 W_4)$  entsprechen die Wendetangenten  $w w_1 \dots w_\infty$  in  $W$ . Wählen wir die Geraden  $w w_1 \dots w_\infty$ , so erhalten wir alle Curven durch die neun Wendepunkte; da  $w$  unter den Geraden  $w \dots w_\infty$  enthalten sein muss, so gehört  $K^3$  zur Reihe der Tripelcurven  $\mathfrak{C}^3 \mathfrak{C}_1^3 \dots \mathfrak{C}_\infty^3$ . Demnach gelten alle für eine Tripelcurve bewiesenen Sätze für jede beliebige Curve  $K^3$  dritter Ordnung. Aus Allem folgt:

„Jede Curve  $K^3$  dritter Ordnung kann als Tripelcurve angesehen werden und man kann sie daher auch durch ein Kegelschnittbüschel und ein projectivisches Strahlenbüschel erzeugen. Sie ist durch neun Punkte im Allgemeinen vollständig und eindeutig bestimmt und wird von einer andern Curve  $K_1^3$  dritter Ordnung in neun Punkten geschnitten.“



Parabeln. Aendert sich  $p$  in der Gleichung

$$x^2 - py = 0 \text{ oder } \frac{x^2}{y} = p,$$

so entsteht eine Schaar von Parabeln, welche den Scheitel und die Axe gemein, dagegen verschiedene Parameter haben. Für die Berührungspunkte der Tangenten ergibt sich

$$xy + hx - 2gy = 0;$$

der betreffende geometrische Ort ist hiernach eine gleichseitige Hyperbel, welche durch den Parabelscheitel und den festen Punkt  $g, h$  geht, deren Mittelpunkt die Coordinaten  $2g$  und  $-h$  besitzt und deren Asymptoten parallel zu den ursprünglichen Coordinatenachsen liegen.

Der geometrische Ort der Normalenfusspunkte hat zur Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - gx - 2hy = 0,$$

ist also eine Ellipse, welche durch den Parabelscheitel und den Punkt  $g, h$  geht, deren Mittelpunkt die Coordinaten  $\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h$  besitzt und deren Halbachsen

$$\frac{\sqrt{g^2 + 2h^2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{g^2 + 2h^2}}{2\sqrt{2}}$$

parallel zu den Coordinatenachsen liegen. Hieraus folgt beiläufig eine Lösung der Aufgabe, von einem gegebenen Punkte  $gh$  Normalen auf eine gegebene Parabel zu fällen; die Durchschnitte der Parabel mit der vorerwähnten Ellipse sind nämlich die Fusspunkte der gesuchten Normalen.

Bei allgemeineren parabolischen Curven, welche durch die Gleichung

$$x^\mu - py^\nu = 0$$

charakterisirt werden, bleibt die Sache ziemlich dieselbe; für die Berührungspunkte ergibt sich

$$(\mu - \nu)xy + \nu hx - \mu gy = 0$$

und für die Fusspunkte

$$\nu x(x - g) + \mu y(y - h) = 0.$$

Ähnliche Kegelschnitte. Betrachtet man in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$$

$\lambda^2$  als veränderlichen Parameter, so erhält man ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen; der geometrische Ort der Berührungspunkte hat dann zur Gleichung

$$\frac{x(x - g)}{a^2} + \frac{y(y - h)}{b^2} = 0$$

und ist hiernach eine durch die Punkte  $0, 0$  und  $g, h$  gehende ähnliche Ellipse.

Für den geometrischen Ort der Normalenfusspunkte ergibt sich, wenn  $a^2 - b^2$  mit  $c^2$  bezeichnet wird,

$$c^2 xy + b^2 hx - a^2 gy = 0;$$

dieser Gleichung entspricht eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Punkte  $0, 0$  und  $g, h$  geht, deren Mittelpunktscoordinaten



1. Lösung

$$\frac{1}{z} = 1.$$

Welchen reellen Werth hat die Auflösung?

Die beiden Lösungen ergeben, etwa  $x_1$  und  $x_2$ ,

so dass  $x_1 = 1$  und  $x_2 = 1$  setzen dürfen.

Es ist

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Die beiden Lösungen sind also absolute Beträge der Complexen

gleich

gleich

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Die beiden Lösungen sind also absolute Beträge der Complexen

gleich

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Die beiden Lösungen sind also absolute Beträge der Complexen

gleich

gleich

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Die beiden Lösungen sind also absolute Beträge der Complexen

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

gleich

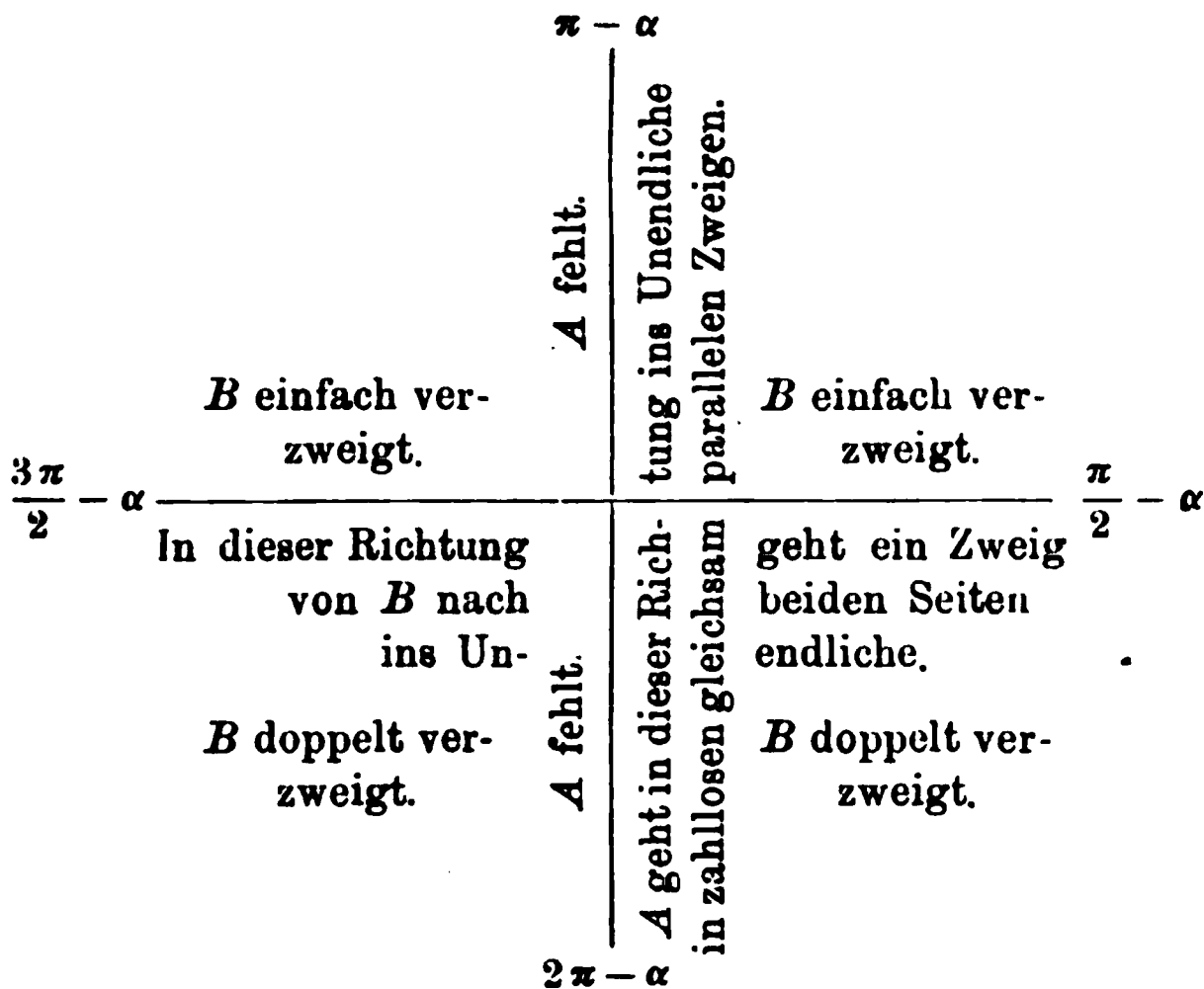
gleich

gleich



Was nun die Entscheidung unserer Hauptfrage nach dem Durchschneiden der beiden Curven 5) betrifft, so ist zunächst wichtig, zu bemerken, dass die beiden vorhin gefundenen Richtungen  $\pi - \alpha$  und  $\frac{\pi}{2} - \alpha$  auf einander senkrecht stehen. Auch wird der aufmerksame Leser gefunden haben, dass der Ausdruck: „eine Seite des Strabes“ nur der Kürze wegen in dieser Unbestimmtheit belassen ist.

Wir wollen jetzt diesen Zweifel heben und zwar indem wir die Curven, wie es schon im Texte geschehen ist, mit  $A$  und  $B$  bezeichnen, in folgender anschaulicher Form, welche ohne nähere Beschreibung unzweifelhaft verständlich ist, wenn gesagt wird, dass in dem Winkelraume links oben die Curve  $A$  gar nicht und  $B$  in einfachem Zuge vorkommt. Man sieht sofort, dass der ins Unendliche verlaufende Zweig von  $B$  in dem Quadranten rechts unten die sämtlichen Zweige von  $A$  durchsetzen muss. Interessante Fragen, ob im Quadranten rechts oben; überhaupt, ob auf dem endlichen Zweige von  $B$  Schnittpunkte liegen, übergehe ich, da ja die Hauptfrage in bejahendem Sinne entschieden ist.



Nehmen wir endlich  $a > \frac{1}{e}$  an, so erhalten wir für  $\varphi = \frac{3\pi}{2} - \alpha$  wie oben zwei Werthe des  $\varphi$ , nämlich 1 und  $\infty$ ; wächst  $\varphi$ , so liegt  $\alpha + \varphi$  im vierten Quadranten, sein Cosinus ist positiv und für jeden Winkel existiren zwei Curvenpunkte, bis  $\varphi$  den Werth erreicht, welcher durch die Gleichung gegeben ist

$$6) \quad \frac{1}{e} = a \cdot \cos(\alpha + \varphi),$$

Hier liegt ein Haltepunkt der Curve, der zugleich eine Spitze ist. Ein liegt symmetrisch im ersten Quadranten. Ist derselbe überschritten, so wieder jedem Winkel zwei Werthe des  $\varphi$  also zwei





Büschel  $M(s_1 s_2 \dots)$  und  $(ABCD)\{\kappa_1^2 \kappa_2^2 \dots\}$  erzeugt wird, kann demnach auch durch  $M(s_1 s_2 \dots)$  und  $(ABE_3 E)\{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots\}$  erzeugt werden. Unter den Grundpunkten des letzteren kommt ein beliebiger Punkt  $E_3$  der Curve  $C^3$  vor; zwei der Grundpunkte  $AB$  sind schon im ersten Büschel vorhanden. Das zweite Büschel ersetze man durch ein drittes mit den Grundpunkten  $AE_3 P_3 P$  und dieses durch ein viertes mit den Grundpunkten  $E_3 P_3 Q_3 Q$ , von denen noch  $P_3$  und  $Q_3$  ganz beliebige Punkte von  $C^3$  sind. Daraus aber ergibt sich: Legt man durch die Punktpaare  $E_1 F_1$ ,  $E_2 F_2$ ,  $E_3 F_3$ , ... und drei ganz beliebige Punkte  $E_3 P_3 Q_3$  von  $C^3$  Kegelschnitte, so treffen sie sich noch in einem Punkte  $Q$  von  $C^3$ .

Durch einen beliebigen Punkt  $S$  von  $C^3$  ziehe man einen Strahl  $g_1$ , der  $C^3$  noch in  $S_1 T_1$  schneidet, und lege durch die vier Punkte  $E_1 F_1 S_1 T_1$  einen Kegelschnitt  $\mu_1^2$ , der  $C^3$  noch in  $HK$  trifft. Nach dem Vorigen lässt sich dann auch durch  $E_2 F_2 S_1 T_1 HK$  ein Kegelschnitt  $\nu_1^2$  legen. Wenn  $\mu_1^2$  das Büschel  $(E_1 F_1 HK)$  durchläuft, so durchläuft  $\nu_1^2$  das Büschel  $(E_2 F_2 HK)$ ; je zwei Kegelschnitte dieser Büschel treffen sich noch in zwei Punkten  $S_2 T_2$ ,  $S_3 T_3$ , ... von  $C^3$  und sind dadurch projectivisch einander zugeordnet. Da die Geradenpaare  $(HK, E_1 F_1)$  und  $(HK, E_2 F_2)$  sich auch in zwei Punkten von  $C^3$  schneiden, nämlich in  $M$  und dem dritten Schnittpunkt von  $HK$  mit  $C^3$ , so entsprechen sie einander in der projectivischen Beziehung und die Geraden  $S_1 T_1$ ,  $S_2 T_2$ ,  $S_3 T_3$ , ... müssen sich nach 1, S. 427, in einem Punkte schneiden. Dieser muss auf  $C^3$  liegen, denn diese Curve wird durch das Strahlenbüschel in ihm und das Kegelschnittbüschel  $(E_1 F_1 HK)$  erzeugt. Also ist  $S$  der Schnittpunkt. Das vorhin erhaltene Resultat wird also verallgemeinert: Ist  $S$  ein beliebiger Punkt von  $C^3$  und schneiden die Strahlen durch  $S$  diese Curve in  $S_1 T_1$ ,  $S_2 T_2$ ,  $S_3 T_3$ , ..., so treffen sich alle Kegelschnitte, welche durch diese Punktpaare und drei beliebige Punkte von  $C^3$  gelegt werden, noch in einem Punkte von  $C^3$ .

Für den Satz 12, S. 436, hat Herr Professor Sturm in Münster mir folgenden Beweis mitgetheilt.

Durch  $A$  ziehe man zwei unendlich benachbarte Strahlen, welche die Curve in  $BC$  und  $B'C'$  und die erste Polare  $A^2$  in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{A}'$  treffen; also laufen die drei Tangenten  $b$ ,  $c$ ,  $a$  in  $B$ ,  $C$ ,  $\mathfrak{A}$  an  $C^3$  und  $A^2$  in einen Punkt  $\mathfrak{A}''$  zusammen; desgleichen die drei Tangenten  $a$ ,  $c$ ,  $b$  in  $A$ ,  $C$ ,  $\mathfrak{B}$  an  $C^3$  und  $B^2$  in den Punkt  $\mathfrak{B}''$  zusammen, wenn  $B^2$  die erste Polare von  $B$  und  $\mathfrak{B}$  ihr Schnittpunkt mit  $AB$  ist. Es seien  $D$ ,  $\mathfrak{A}'''$ ,  $\mathfrak{B}'''$  die Schnittpunkte von  $a$  und  $b$ ,  $a$  und  $a$ ,  $b$  und  $b$ , so ist  $A\mathfrak{B}''\mathfrak{A}'''D \bar{\wedge} B\mathfrak{A}''\mathfrak{B}'''D$ , weil beides harmonische Gruppen sind, also gehen  $AB$ ,  $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''$  oder  $c$ ,  $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$  durch denselben Punkt, d. i.  $C$ . Die letzte Gerade ist aber die gemeinsame Polare von  $A$  nach  $B^2$  und von  $B$  nach  $A^2$ ; denn erstens müssen beide Polaren durch  $C$  gehen, weil  $C$  von  $B$  durch  $A\mathfrak{A}$  und von  $A$  durch  $B\mathfrak{B}$  harmonisch getrennt ist. Andererseits ist  $\mathfrak{A}'''$  der Schnittpunkt der Tangenten  $a$  und  $a$  an  $A^2$  in  $A$  und  $\mathfrak{A}$ , liegt also auf der Polare von  $B$  nach  $A^2$ ; ebenso  $\mathfrak{B}'''$  auf der Polare von  $A$  nach  $B^2$ .

Auf S. 433 schreibe man in Z. 5: „in  $o_n$ “ statt „mit  $o_m$ “ und statt „ein gemeinschaftlicher ...“ schreibe man „und  $(o_m o_n)$  conjugirte Punkte für beide Büschel wären“.

Auf S. 436 in Satz 13, Z. 8 schreibe man: „ $P^2$  und  $Q^2$  die ihnen zugehörigen Kegelschnitte“ statt „ $P^2$  und  $Q^2$  ihre ersten Polaren“.

140 Z. 7 von unten und S. 441 Z. 16, 17 von oben  $g$  statt  $l$ .



Die zweite Polarfläche einer Geraden  $G$  bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist demnach ein Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze im Durchschnittspunkte der drei Ebenen  $P_k, P_{k'}, P_{kk'}$  liegt. Diese Fläche wird auch der Polarkegel der Geraden  $G^*$  genannt.

Von der Coordinatenebene  $x_3 = 0$  wird der Polarkegel der Geraden  $G$  in einer Hyperbel geschnitten, und zwar ist dieselbe eine gleichseitige, wenn die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in der Unendlichkeit liegt.

Aus der Gleichung 30) lassen sich folgende bemerkenswerthe Specialfälle ableiten.

$\alpha$ ) Schneidet die Gerade  $G$  die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche, so degenerirt der Polarkegel in eine Doppelebene, welche die Doppellinie in sich enthält.

$\beta$ ) Ist die Gerade  $G$  eine Generatrix der windschiefen Fläche, so schneiden sich alle Ebenen des Systems in derselben.

$\gamma$ ) Liegt die Gerade  $G$  in der Ebene  $x_1 = 0$ , so ist der Polarkegel derselben bezüglich der windschiefen Fläche  $W$  ein parabolischer Cylinder, dessen Generatrix der Axe  $x_2 = 0, x_3 = 0$  parallel läuft.

so liegt die Spitze des Polarkegels bezüglich der windschiefen Fläche  $W$  in dem Punkte  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ .

$\delta$ ) Befindet sich die Gerade  $G$  in der Ebene  $x_2 = 0$ , so ist der Polarkegel derselben ein hyperbolischer Cylinder.

$\epsilon$ ) Liegt die Gerade  $G$  in der Ebene  $x_3 = 0$ , so degenerirt der Polarkegel derselben in eine Doppelebene, die mit  $x_4 = 0$  zusammenfällt; liegt  $G$  dagegen in der Ebene  $x_4 = 0$ , so geht der Polarkegel über in eine Doppelebene, welche mit der Ebene  $x_3 = 0$  zusammenfällt.

Mit Hilfe von 5) lassen sich die beiden folgenden Sätze ableiten:

Die Spitze des Polarkegels der Geraden  $G$  ist der Pol derjenigen quadratischen Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), welche durch  $G$  hindurchgeht.

Der Polarkegel der Geraden  $G$  ist der geometrische Ort aller Pole, deren quadratische Polarflächen bezüglich einer windschiefen Fläche 1) von der Geraden  $G$  berührt werden.

16. Die gemischte Polarfläche zweier Geraden  $G$  und  $G'$ . Construiert man zu jedem Punkte einer Geraden  $G$  die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) und zu jedem Punkte einer Geraden  $G'$  die Polarebene bezüglich jeder jener quadratischen Polarflächen, so wird das Ebenensystem von einer Fläche zweiter Ordnung, der gemisch-







18. Nach 4 ist die Polarebene eines Punktes  $k$  bezüglich einer Fläche zugleich auch die Polarebene bezüglich der quadratischen Polarfläche desselben Punktes. Bestimmt man also für jeden Punkt auf der Ebene  $E$  die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) und ausserdem für jeden dieser Punkte die Polarebene in Bezug auf die zugehörige quadratische Polarfläche, so wird das Ebenensystem von der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$  eingehüllt.

Nach den Erklärungen in 15 und 17 ist die gemeine Polarfläche einer Ebene  $E$  auch die Enveloppe der Polarkegel aller Geraden, welche in der Ebene  $E$  liegen.

Gegeben seien zwei Ebenen  $E$  und  $E'$ , welche sich in einer Geraden  $G$  schneiden mögen. Bestimmt man den Polarkegel der Geraden  $G$ , so ist derselbe Tangentenkegel sowohl der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$ , als auch der der Ebene  $E'$ , und zwar liegt sein Scheitel in jeder dieser beiden Polarflächen.

Eine Ebene  $E$  schneidet eine windschiefe Fläche 1) im Allgemeinen in einer Curve dritter Ordnung. Die Polarebenen aller Punkte dieser Schnittcurve sind zugleich Tangentialebenen der windschiefen Fläche an diesen Punkten. Daraus lässt sich schliessen: Die abwickelbare Fläche, welche von den Tangentialebenen längs der Schnittcurve gebildet wird, ist der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$  umgeschrieben.

Ist die Ebene  $E$  Tangentialebene der windschiefen Fläche 1), so liegt auch die durch den Berührungspunkt gehende Generatrix derselben auf der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$ .

Durch einen beliebigen Punkt  $k$  sei ein System von Ebenen  $E_1, E_2, E_3, \dots$  gelegt und zu jeder derselben die gemeine Polarfläche construirt. Da der Punkt  $k$  auf jeder dieser Ebenen liegt, so muss die Polarebene desselben bezüglich einer windschiefen Fläche 1) zu jedem der Systeme von Ebenen gehören, dessen Enveloppe eine jener gemeinen Polarflächen ist.

Gehen demnach die Ebenen  $E_1, E_2, E_3, \dots$  alle durch einen Punkt  $k$ , so ist die Polarebene des Punktes  $k$  bezüglich einer windschiefen Fläche 1) die gemeinschaftliche Tangentialebene der gemeinen Polarflächen der Ebenen  $E_1, E_2, E_3, \dots$ .

19. Gegeben sei eine Ebene  $E$ , welche der Gleichung

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0$$

entsprechen möge. Wenn man für jeden Punkt derselben als Pol die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1) bestimmt, so ergibt sich als Gleichung dieses Systems von Hyperboloiden

$$(a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4) x_4^2 + a_1 \xi_2 x_3^2 + 2 a_1 \xi_3 x_2 x_3 - 2 a_1 \xi_4 x_1 x_4 = 0,$$





Die quadratischen Polarflächen aller Punkte, welche auf der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$  liegen, haben diese Ebene selbst zur gemeinschaftlichen Tangentialebene.

Umgekehrt ist die gemeine Polarfläche der Ebene  $E$  der geometrische Ort aller Punkte, deren quadratische Polarflächen von der Ebene  $E$  berührt werden.

Die gemeine Polarfläche der Ebene

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

bezüglich einer windschiefen Fläche 1) fällt mit der der Ebene  $E$  zusammen.

21. Auf der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$  bezüglich einer windschiefen Fläche 1) befinde sich ein Punkt  $k$ . Die quadratische Polarfläche dieses Punktes bezüglich einer windschiefen Fläche 1) wird nach dem Vorigen von der Ebene  $E$  in einem Punkte  $k'$  berührt, aber ausserdem in zwei Geraden, welche durch  $k'$  gehen, geschnitten. Bildet man die Polarebenen aller Punkte der Geraden  $G$  und  $G'$ , so muss jede derselben eine Tangentialebene der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$  sein und durch den Punkt  $k$  hindurchgehen. Von den Berührungspunkten dieser Tangentialebenen fällt nur der der Polarebene  $P_{k'}$  mit  $k$  zusammen.

Die beiden Polarkegel der Geraden  $G$  und  $G'$  haben demnach ihre Scheitelpunkte in  $k$  und sind Tangentenkegel der gemeinen Polarfläche der Ebene  $E$ .

22. Durch einen beliebigen Punkt  $k$  seien alle möglichen Tangentialebenen an die gemeine Polarfläche einer Ebene bezüglich einer windschiefen Fläche 1) gelegt. Werden diese Tangentialebenen als Polarebenen bezüglich der windschiefen Fläche 1) betrachtet, so muss der Pol einer jeden sich auf der Ebene  $E$  befinden. Da nun die quadratische Polarfläche des Punktes  $k$  der geometrische Ort aller Pole ist, deren Polarebenen durch den Punkt  $k$  hindurchgehen, so lassen sich folgende Sätze aufstellen.

Beschreibt man von einem Punkte  $k$  aus einen Tangentenkegel um die gemeine Polarfläche einer Ebene  $E$  und betrachtet die Tangentialebenen desselben als Polarebenen der windschiefen Fläche, so befinden sich alle Pole derselben auf einem Kegelschnitte, nämlich auf der Schnittcurve der quadratischen Polarfläche  $P_k$  und der Ebene  $E$ .

Bildet man zu allen Punkten der Schnittcurve der Ebene  $E$  und einer quadratischen Polarfläche  $P_k$  in Bezug auf eine windschiefe Fläche 1) die Polarebenen, so werden dieselben einge-  
 - ekel eingehüllt, welcher der gemeinen Polar-



$$a_2 x_2 - 2 a_3 x_3 = 0, \quad x_4^2 = 0.$$

Daraus erhellt:

Geht die Ebene  $E$  durch den Schnittpunkt der drei Ebenen  $x_2=0$ ,  $x_3=0$ ,  $x_4=0$ , so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der Fläche  $W$  aus drei Ebenen, von denen die eine die Gerade  $x_2=0$ ,  $x_3=0$  enthält, die beiden anderen mit der Ebene  $x_4=0$  zusammenfallen.

Steht die Ebene  $E$  auf der Ebene  $x_1=0$  lothrecht, so wird die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der Fläche  $W$  von drei Ebenen gebildet, von denen die eine die Gerade  $x_2=0$ ,  $x_3=0$  enthält, die beiden anderen mit der unendlich fernen Ebene zusammenfallen.

Dieselben Resultate ergeben sich, wenn die Ebene  $E$  die Gerade  $x_2=0$ ,  $x_3=0$  enthält.

β) Für  $a_2=0$  erhält man

$$a_1^2 x_1 x_3^2 - 2 a_1 a_4 x_3^2 x_4 = 0$$

oder

$$x_3^2 = 0, \quad a_1 x_1 - 2 a_4 x_4 = 0.$$

Steht also die Ebene  $E$  lothrecht auf der Ebene  $x_2=0$ , so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der windschiefen Fläche  $W$  aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene  $x_3=0$  zusammenfallen, die dritte der Ebene  $x_4=0$  parallel läuft.

so besteht die gemeine Polarfläche derselben bezüglich der windschiefen Fläche  $W$  aus drei Ebenen, von denen zwei mit der Ebene  $x_3=0$  zusammenfallen, die dritte der Ebene  $x_1=0$  parallel läuft.

Diese Resultate bleiben unverändert, wenn man  $a_2=a_3=0$  setzt.

γ) Enthält die Ebene  $E$  die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche, so verschwindet die Gleichung 40b).

δ) Setzt man  $a_3=a_4=0$ , so erhält die Gleichung 40b) die einfachere Gestalt

$$a_1^2 x_1 x_3^2 - a_2^2 x_2 x_4^2 = 0.$$

Enthält demnach die Ebene  $E$  die einfache Leitlinie der Fundamentalfläche, so ist die gemeine Polarfläche derselben ebenfalls eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren doppelte Leitlinie mit der Geraden  $x_3=0$ ,  $x_4=0$ , deren einfache Leitlinie mit der Geraden  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  zusammenfällt, deren singuläre Erzeugende aber in den Schnittkanten  $x_2=0$ ,  $x_3=0$  und  $x_1=0$ ,  $x_4=0$  liegen.

ε) Für  $a_1=a_3=0$  ergibt sich

$$x_2 x_4^2 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 0, \quad x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt:

Geht die Ebene  $E$  durch die Doppelgeneratrix der windschiefen Fläche  $W$ , so wird die ge-

Läuft die Ebene  $E$  der Ebene  $x_2=0$  parallel, so besteht die gemeine Polarfläche derselben bestig-



$$F) \quad u_{11}\xi_1^2 + u_{22}\xi_2^2 + u_{33}\xi_3^2 + u_{44}\xi_4^2 + 2u_{12}\xi_1\xi_2 + 2u_{13}\xi_1\xi_3 + 2u_{14}\xi_1\xi_4 \\ + 2u_{23}\xi_2\xi_3 + 2u_{24}\xi_2\xi_4 + 2u_{34}\xi_3\xi_4 = 0.$$

Wird die Ebene  $E'$  als Polarebene dieser quadratischen Polarfläche angenommen, so müssen bekanntlich die Coordinaten des zugehörigen Poles der Proportion

$$\frac{dF}{d\xi_1} : \frac{dF}{d\xi_2} : \frac{dF}{d\xi_3} : \frac{dF}{d\xi_4} = a'_1 : a'_2 : a'_3 : a'_4$$

genügen, woraus sich die Relationen ergeben

$$46) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{11}\xi_1 + u_{12}\xi_2 + u_{13}\xi_3 + u_{14}\xi_4 = \lambda a'_1, \\ u_{21}\xi_1 + u_{22}\xi_2 + u_{23}\xi_3 + u_{24}\xi_4 = \lambda a'_2, \\ u_{31}\xi_1 + u_{32}\xi_2 + u_{33}\xi_3 + u_{34}\xi_4 = \lambda a'_3, \\ u_{41}\xi_1 + u_{42}\xi_2 + u_{43}\xi_3 + u_{44}\xi_4 = \lambda a'_4. \end{array} \right.$$

Durch Elimination der Grössen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  aus den Gleichungen 45a) und 46) findet man demnach die Gleichung des geometrischen Ortes der Pole. Die Gleichungen 46) ändern sich indessen nicht, wenn man  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  mit  $x_1, x_2, x_3, x_4$  vertauscht. Man gelangt daher zu demselben Resultate, wenn man aus den Gleichungen 46) und

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4 = 0$$

die Grössen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  eliminirt. Durch diese Operation findet man,

$$47) \quad \left| \begin{array}{ccccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ a'_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ a'_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ a'_4 & u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{array} \right| = 0.*$$

Setzt man die entsprechenden Werthe statt  $u_{11}, u_{12}, \dots$  ein, so erhält man für den vorliegenden Fall

$$48a) \quad \left| \begin{array}{ccccc} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a'_1 & 0 & 0 & 0 & 2x_4 \\ a'_2 & 0 & 0 & -2x_3 & 0 \\ a'_3 & 0 & -2x_3 & -2x_2 & 0 \\ a'_4 & 2x_4 & 0 & 0 & 2x_1 \end{array} \right| = 0$$

oder

$$48b) \quad a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3^2 x_4 \\ + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4^2 = 0$$

Die gemischte Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  bezüglich einer windschiefen Fläche 1) ist demnach ebenfalls eine windschiefe Fläche dritter Ordnung, deren doppelte Leitlinie mit der Geraden  $x_3 = 0, x_4 = 0$  zusammenfällt, und deren einfache Leitlinie die Schnittkante der beiden Ebenen



Polarflächen [bezüglich einer windschiefen Fläche 1)], zu denen die Ebenen  $E$  und  $E'$  conjugirt sind.

Demnach lassen sich folgende Sätze aufstellen:

Bestimmt man zu jedem Punkte der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  die quadratische Polarfläche bezüglich einer windschiefen Fläche 1), so sind die Ebenen  $E$  und  $E'$  bezüglich jeder der quadratischen Polarflächen conjugirt, jede geht durch den Pol der andern.

Jedem Punkte  $f$  auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  entspricht ein Punkt  $k$  auf der Ebene  $E$  und ein Punkt  $k'$  auf der Ebene  $E'$ , und zwar ist  $k$  der Pol der Ebene  $E'$  und  $k'$  der Pol der Ebene  $E$  bezüglich der quadratischen Polarfläche  $P, q$ .

28. Die beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  mögen sich in der Geraden  $G$  schneiden. Einem Punkte  $k$  auf dieser Geraden entspricht, weil er auf der Ebene  $E$  liegt, ein bestimmter Punkt  $f$  auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$ , ferner ein zweiter Punkt  $f'$  auf derselben Fläche, weil  $k$  auch auf der Ebene  $E'$  liegt. Da nun aber  $k$  der Ebene  $E'$  angehört, so befindet sich der Punkt  $f$  auch auf der gemeinen Polarfläche von  $E'$ , und zwar wird dieselbe in diesem Punkte von der Polarebene des Punktes  $k$  bezüglich der Fundamentalfäche berührt. Entsprechend ist auch  $f'$  der Pol der Ebene  $E$  bezüglich der quadratischen Polarfläche  $P, q$  und muss, da  $k$  auch auf der Ebene  $E$  liegt, sich auf der

gemeinen Polarfläche von  $E$  befinden, wo dieselbe von der Polarebene des Punktes  $k$  berührt wird.

Daraus folgt:

In der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  befinden sich zwei Punktreihen, welche den Punkten der Schnittkante der Ebenen  $E$  und  $E'$  entsprechen, und zwar sind diese die Punkte, in welchen die beiden gemeinen Polarflächen der Ebenen  $E$  und  $E'$  von den Polarebenen, deren Enveloppe der Polarkegel der Geraden  $G$  ist, berührt werden.

29. Durch die Gerade  $G$ , in der die beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  sich schneiden, möge eine dritte Ebene gelegt sein. Die Gleichung derselben sei

$$(a_1 + \lambda a'_1) \xi_1 + (a_2 + \lambda a'_2) \xi_2 + (a_3 + \lambda a'_3) \xi_3 + (a_4 + \lambda a'_4) \xi_4 = 0.$$

Durch den Werth der Grösse  $\lambda$  ist die Lage der Ebene bestimmt. Die gemeine Polarfläche dieser Ebene bezüglich einer windschiefen Fläche 1) entspricht nach 18) der Gleichung

$$51a) (a_1 + \lambda a'_1)^2 x_1 x_3^2 - (a_2 + \lambda a'_2)^2 x_2 x_4^2 - 2(a_1 + \lambda a'_1)(a_4 + \lambda a'_4) x_3^2 x_4 + 2(a_2 + \lambda a'_2)(a_3 + \lambda a'_3) x_3 x_4^2 = 0$$





Durch Elimination von  $x_2$  aus den Gleichungen der gemischten Polarfläche von  $E$  und  $E'$  und der von  $E$  und  $E''$  erhält man

$$54) \begin{cases} x_3 = 0, \\ a_1(a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)x_1 x_3 + \{a_1(a'_2 a''_4 - a'_4 a''_2) - a_4(a'_1 a''_2 - a'_2 a''_1)\}x_3 x_4 \\ - a_2(a'_2 a''_3 - a'_3 a''_2)x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Die Projection der Basis des Flächenbüschels 53b) auf  $x_2 = 0$  besteht demnach aus einer Geraden und einem Kegelschnitte.

31. Zu jedem Punkte der gemischten Polarfläche der Ebenen  $E$  und  $E'$  sei die quadratische Polarfläche bezüglich der zugehörigen windschiefen Fläche construirt. Das System der Hyperboloide entspricht dann der Gleichung

$$\xi_1 x_4^2 - \xi_2 x_3^2 - 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\xi_4 x_1 x_4 = 0,$$

in der die Verhältnisse  $\frac{\xi_1}{\xi_4}, \frac{\xi_2}{\xi_4}, \frac{\xi_3}{\xi_4}$  der Relation

$$55) a_1 a'_1 \xi_1 \xi_3^2 - a_2 a'_2 \xi_2 \xi_4^2 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) \xi_3^2 \xi_4 + (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) \xi_3 \xi_4^2 = 0$$

genügen müssen. Als Gleichung der Envelope dieses Systems findet man

$$x_3^4 x_4^4 = 0, \quad 2A\sqrt{B}x_1 + 2B\sqrt{A}x_2 + D\sqrt{A}x_3 + C\sqrt{B}x_4 = 0,$$

d. h.: Das System der quadratischen Polarflächen, deren Pole auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  liegen, wird von zehn Ebenen eingehüllt, von denen vier mit der Ebene  $x_3 = 0$ , vier mit der Ebene  $x_4 = 0$  zusammenfallen.

32. Für besondere Lagen der Ebenen  $E$  und  $E'$  kann die Gleichung 48b) eine einfachere Gestalt annehmen.

α) Setzt man  $a_1 = 0$ , so erhält man

$$56a) \quad x_4 = 0, \quad a_2 a'_2 x_2 x_4 + a_4 a'_1 x_3^2 - (a_2 a'_3 + a_3 a'_2) x_3 x_4 = 0.$$

Daraus folgt:

Geht die Ebene  $E$  durch den Schnittpunkt  $P$  der drei Ebenen  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ , so besteht die gemischte Polarfläche von  $E$  und  $E'$  bezüglich der Fläche  $W$  aus der Ebene  $x_4 = 0$  und einem Kegelschnitt zweiter Ordnung, dessen Scheitel im Punkte  $P$  liegt.

Steht die Ebene  $E$  auf der Ebene  $x_1 = 0$  lothrecht, so besteht die gemischte Polarfläche von  $E$  und  $E'$  bezüglich der Fläche  $W$  aus der unendlich fernen Ebene und einem parabolischen Cylinder, dessen Generatrix der Kante  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  parallel läuft.

Da die Gleichungen 56a) unabhängig sind von  $a'_4$ , so werden die vorstehenden Resultate unverändert bleiben, wenn man  $E'$  alle Lagen ertheilt, welche den verschiedenen Werthen von  $a'_4$  entsprechen.

β) Für  $a_2 = 0$  geht die Gleichung 48b) über in

$$56b) \quad x_3 = 0, \quad a_1 a'_1 x_1 x_3 - (a_1 a'_4 + a_4 a'_1) x_3 x_4 + a_3 a'_2 x_4^2 = 0.$$

Steht demnach die Ebene  $E$  auf der Ebene  $x_2=0$  lothrecht, so degenerirt die gemischte Polarfläche von  $E$  und  $E'$  bezüglich einer windschiefen Fläche 1) in die Ebene  $x_3=0$  und einen hyperbolischen Cylinder.

Ertheilt man in diesem Falle der Ebene  $E'$  alle möglichen Lagen, welche den verschiedenen Werthen von  $a'_3$  entsprechen, so bleibt die gemischte Polarfläche unverändert.

$\gamma$ ) Setzt man  $a_1=0$ ,  $a_2=0$ , so ergibt sich

$$56c) \quad x_3=0, \quad x_4=0, \quad a_4 a'_1 x_3 - a_3 a'_2 x_4 = 0,$$

d. h.: Enthält die Ebene  $E$  die doppelte Leitlinie der windschiefen Fläche in sich, so besteht die gemischte Polarfläche aus drei Ebenen, die sich in dieser Leitlinie schneiden.

$\delta$ ) Ist  $a_3=a_4=0$  und  $a'_3=a'_4=0$ , so nimmt die Gleichung 48b) die Gestalt an

$$56d) \quad a_1 a'_1 x_1 x_3^2 - a_2 a'_2 x_2 x_4^2 = 0.$$

Daraus folgt:

Schneiden sich die beiden Ebenen  $E$  und  $E'$  in der einfachen Leitlinie einer windschiefen Fläche 1), so ist die gemischte Polarfläche derselben ebenfalls eine windschiefe Fläche, deren doppelte Leitlinie mit  $x_3=0$ ,  $x_4=0$ , und deren einfache Leitlinie mit  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  zusammenfällt, deren singuläre Erzeugende aber in den Kanten  $x_2=0$ ,  $x_3=0$  und  $x_1=0$ ,  $x_4=0$  liegen.

(Schluss folgt.)



Curve verbindet, die den Differentialgleichungen des Problems ebenfalls genügt. Wenn man aber die Curve so ändert, dass sie aufhört, dieser Differentialgleichung zu genügen, und zugleich auch andere Endpunkte erhält, so bliebe die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass das Integral abnähme, dass somit kein wirkliches Minimum stattfände.

### § 1.

#### Umformung der zweiten Variation.

Setze ich  $y'$  für  $\frac{dy}{dx}$  und

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx,$$

so habe ich, wenn ich

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial y^m \partial y'^n} \varphi(x, y, y') = a_{mn},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (a_{10} + a_{01}) dx = J,$$

$$\varphi(x_1, y_1, y'_1) \delta x_1 - \varphi(x_0, y_0, y'_0) \delta x_0 = K$$

setze, folgende Gleichungen:

$$1) \quad \delta V = J + K,$$

$$2) \quad \delta J = \int_{x_0}^{x_1} [a_{20} \delta y^2 + 2a_{11} \delta y \delta y' + a_{02} \delta y'^2 + a_{10} \delta^2 y + a_{01} \delta^2 y'] dx \\ + [a_{10} \delta x \delta y + a_{01} \delta x \delta y']_0^1,$$

wobei in dem zwischen den Strichen stehenden Ausdruck erst  $x = x_1$  und dann  $x = x_0$  zu setzen und darauf das Resultat der letzteren Substitution von dem der ersteren abzuziehen ist. — Wenn ich  $\delta K$  bilde, so muss ich die vollständigen Variationen  $[\delta y]$  und  $[\delta y']$  in Anwendung bringen; ich habe demnach

$$\delta K = [a_{10} \delta x [\delta y] + a_{01} \delta x [\delta y'] + \varphi'(x) \delta x^2 + \varphi(x, y, y') \delta^2 x]_0^1,$$

oder, wenn ich  $[\delta y] = \delta y + y' \delta x$  und  $[\delta y'] = \delta y' + y'' \delta x$  setze,

$$3) \quad \delta K = \left[ a_{10} \delta x \delta y + a_{01} \delta x \delta y' + \frac{d}{dx} \varphi(x, y, y') \delta x^2 + \varphi(x, y, y') \delta^2 x \right]_0^1.$$

Setze ich jetzt noch

$$4) \quad \Omega = a_{20} \delta y^2 + 2a_{11} \delta y \delta y' + a_{02} \delta y'^2,$$

so erhalte ich vermöge der 2) und 3) folgenden Ausdruck für die zweite Vari

$$5) \left\{ \begin{aligned} \delta^2 V &= \delta J + \delta K \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \Omega dx + \int_{x_0}^{x_1} [a_{10} - a'_{01}] \delta^2 y dx \\ &\quad + \left| a_{01} \delta^2 y + 2a_{10} \delta x \delta y + 2a_{01} \delta x \delta y' + \frac{d}{dx} \varphi(x, y, y') \delta x^2 \right. \\ &\quad \left. + \varphi(x, y, y') \delta^2 x \right|_0^1. \end{aligned} \right.$$

Soll die erste Variation von  $V$  verschwinden, so muss bekanntlich die Differentialgleichung

$$a_{10} - a'_{01} = 0$$

erfüllt werden. Das zweite Integral in unserem Ausdrucke für  $\delta^2 V$  verschwindet also. — Wenn ich dieselbe Bezeichnungsweise, wie in einer früheren Abhandlung von mir\* anwende, so erhalte ich die Gleichung

$$6) \quad (a_{20} - a'_{01})u - a'_{02}u' - a_{02}u'' = 0,$$

mit Hilfe welcher sich das erste Integral in 5) in folgender Weise umformen lässt:

$$7) \quad \int_{x_0}^{x_1} \Omega dx = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2 dx + \left| \left[ a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'}{u} \right] \delta y^2 \right|_0^1,$$

welche Transformation jedoch nur giltig ist, wenn  $u$  zwischen den Grenzen  $x_0$  und  $x_1$  weder verschwindet, noch unendlich wird. Daher folgt aus 5) und 7)

$$8) \quad \begin{aligned} \delta^2 V &= \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} a_{02} g'^2 u^2 dx + \left| \left[ a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'}{u} \right] \delta y^2 + 2a_{10} \delta x \delta y + 2a_{01} \delta x \delta y' \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dx} \varphi(x, y, y') \delta x^2 + a_{01} \delta^2 y + \varphi(x, y, y') \delta^2 x \right|_0^1. \end{aligned}$$

Wir können die Formel 8) umformen, wenn wir die partialen Variationen  $\delta y$  und  $\delta^2 y$  durch die totalen  $[\delta y]$  und  $[\delta^2 y]$  ersetzen. Die übliche Metaphysik der Variationsrechnung sieht bekanntlich  $y$  als Function von  $x$  und einem Parameter  $\alpha$  an und definirt die partielle Variation von  $y$  als den Zuwachs, den  $y$  erhält, wenn nur  $\alpha$  variirt, die totale als den Zuwachs von  $y$ , wenn  $\alpha$  und  $x$  sich ändern. Demnach hat man

$$\begin{aligned} \delta y &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha, \\ \delta^2 y &= \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} \delta \alpha^2, \\ [\delta y] &= \frac{\partial y}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial y}{\partial x} \delta x, \end{aligned}$$

\* Diese Zeitschrift XXII, 5.



wie  $a_{02}$ . Ich will hier, wie in allen folgenden Fällen annehmen, dass  $a_{02}$  positiv ist. Demnach wäre auch  $\delta^2 V > 0$  und könnte nur dann verschwinden, wenn  $g'$  identisch Null, d. h. wenn  $g$  eine Constante wäre; da aber  $\delta y$  und somit auch  $g$  für  $x = x_1$  verschwinden muss, so kann  $g$  keine andere Constante, als Null sein, woraus folgt, dass  $\delta y$  identisch Null sein müsste. Für einen andern Werth von  $\delta y$  kann  $\delta^2 V$  nicht verschwinden, es findet daher ein Minimum statt.

Unsere Transformation ist auch noch gültig, wenn  $u$  zwar für keinen Punkt zwischen  $x_0$  und  $x_1$ , aber für  $x = x_1$  verschwindet. In diesem Falle kann jedoch  $g$  gleich einer von 0 verschiedenen Constanten angenommen werden, da die Bedingung  $\delta y_1 = 0$  dann auf jeden Fall erfüllt wird;  $\delta^2 V$  kann also zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass  $\delta y$  identisch  $= 0$  ist, und es wird im Allgemeinen kein Minimum stattfinden.

Wenn das Integral sich noch weiter erstreckt, als über den Punkt, in welchem  $u$  verschwindet, so bietet nach Hesse\* das Princip der Continuität wenigstens eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Variation auch ihr Zeichen wechseln könne. Es lässt sich dies indess auch genauer beweisen, wie später gezeigt werden soll.

Ich setze jetzt noch

$$u^1 = \gamma_1^1 r_1 + \gamma_2^1 r_2,$$

wo  $\gamma_1^1$  und  $\gamma_2^1$  zwei beliebige neue Constanten sind, und werde dann den Ausdruck  $\frac{u^1}{u}$  näher untersuchen. Ich bezeichne ihn zu diesem

Zwecke mit  $p$ . Da Gleichung 6) auch gelten muss, wenn ich für  $u$  einsetze  $u^1$  oder  $pu$ , so ergibt sich aus derselben

$$10) \quad a'_{02} u \frac{dp}{dx} + 2a_{02} u' \frac{dp}{dx} + a_{02} u \frac{d^2 p}{dx^2} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = \frac{A}{a_{02} u^2},$$

wo  $A$  eine Constante bezeichnet.

Da  $a_{02}$  nach unserer Annahme stets  $> 0$  ist, so folgt aus 10), dass auch  $\frac{dp}{dx}$  stets dasselbe Zeichen behalten muss. Setze ich  $\gamma_2 = \gamma_1^1 = 0$ ,

$\gamma_1 = \gamma_2^1 = 1$ , so sehe ich, dass dasselbe auch von  $\frac{d}{dx} \frac{r_2}{r_1}$  gilt. Ich be-

zeichne  $\frac{r_2}{r_1}$  mit  $q$  und nehme an,  $\frac{dq}{dx}$  sei stets grösser als 0, da, wenn dieser Ausdruck stets  $< 0$  ist, ganz die entsprechenden Betrachtungen gelten. Es wird dann  $q$  stets zunehmen und denselben Werth, wie für  $x = x_0$  zum zweiten Mal nur dann erhalten können, wenn es, bis ins Unendliche gewachsen, in das negativ Unendliche umschlägt und dann wieder zunimmt. Wenn dann  $q$  für  $x = x'$  wieder denselben Werth annimmt, wie für  $x = x_0$ , so darf nach den Auseinandersetzungen dieses





rentialquotient muss also auch für  $x = (x)$  negativ sein; da ferner  $u^1 = u$ , so sehen wir, dass  $\delta^2 V$  für die angenommenen Werthe von  $\delta y$  negativ wird, dass also auf keinen Fall ein Minimum existiren kann.

### § 3.

#### Betrachtung eines Ausnahmefalles.

Es ist jetzt noch der Fall zu betrachten, dass eine der Grössen  $r_1$  und  $r_2$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  unendlich wird, für welchen Fall unsere Schlussweise ungiltig ist, wie Herr Professor Mayer\* in einer allgemeineren Untersuchung bemerkt hat. Es werde  $r_1$  für  $x = (x)$  unendlich, dann ist zunächst möglich, dass  $r_2$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  weder verschwindet, noch unendlich wird. Dann kann ich  $u = \gamma_2 r_2$  setzen, wobei die Transformation 8) giltig bleibt; es wird also ein Minimum stattfinden, wenn nur  $\alpha_{02}$  positiv bleibt. Verschwindet dagegen  $r_2$  für einen Werth zwischen  $x_0$  und  $(x)$ , den ich mit  $\xi$  bezeichnen will, so wird der Ausdruck  $q = \frac{r_2}{r_1}$  an dieser Stelle 0, und wenn sich  $x$  der Grenze  $(x)$  nähert, so nähert  $q$  sich wiederum der Grenze 0, da sein Nenner  $\infty$  wird. Wenn wir voraussetzen, dass  $\alpha_{02}$  stets positiv bleibt, so behält der Differentialquotient von  $q$  stets dasselbe Zeichen,  $q$  muss also zwischen  $\xi$  und  $(x)$  durch  $\infty$  hindurchgegangen sein. Nehmen wir, wie früher, an, dass  $q$  stets zunimmt, so wird für einen Werth  $(\xi)$ , der zwischen  $x_0$  und  $\xi$ , und zwar sehr nahe an  $\xi$  liegt,  $q$  etwas kleiner als 0 sein; da aber  $q$  aus dem negativ Unendlichen bis 0 zunimmt, wenn  $x$  sich der Grenze  $(x)$  nähert, so muss es einen Werth  $\xi'$  zwischen  $x_0$  und  $(x)$  geben, für welchen  $q$  denselben Werth annimmt, wie für  $x = (\xi)$ . Da zwischen  $(\xi)$  und  $\xi'$  die Differentialquotienten von  $y$  nach  $c_1$  und  $c_2$  nicht  $\infty$  werden, so gelten für ein von  $(\xi)$  bis  $\xi'$  ausgedehntes Integral unsere früheren Betrachtungen, d. h.: die zweite Variation dieses Integrals kann zum Verschwinden gebracht werden, und es wird auf keinen Fall ein Minimum stattfinden, wenn das Integral noch weiter ausgedehnt

wird; das Integral  $\int_{x_1}^{x_1} \varphi(x, y, y') dx$  wird also in dem betrachteten Falle kein Minimum haben.

Ganz das Entsprechende gilt, wenn  $r_2$  an einer Stelle zwischen  $(x)$  und  $x_1$  verschwindet. Nur der Fall, dass  $r_2$  an derselben Stelle verschwindet, an welcher  $r_1$  unendlich wird, sowie der, dass jeder der beiden Differentialquotienten an einer Stelle zwischen  $x_0$  und  $x_1$  unendlich wird, entzieht sich noch unseren Betrachtungen.

---

\* Crelle's Journal Bd. 69.



damit die erste Variation verschwinde, die Ausdrücke  $a_{01}$  und  $\varphi(x, y, y')$  für  $x = x_1$  verschwinden. Der in 8) ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck geht somit über in

$$14) \quad \left[ a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'_1}{u_1} \right] \delta y_1^2 + 2 a_{10} \delta x_1 \delta y_1 + \frac{d}{dx} \varphi(x, y, y') \delta x_1^2,$$

wobei in den Ausdrücken  $a_{11}$ ,  $a_{02}$  u. s. w.  $x = x_1$  zu setzen ist. Der Ausdruck 14) muss, wenn ein Minimum stattfinden soll, eine positive quadratische Form in Bezug auf  $\delta x_1$  und  $\delta y_1$  sein. Die in  $u$  vorkommenden Constanten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sind, wie früher, so zu bestimmen, dass  $u$  für  $x = x_0$  verschwindet.

Ist  $x_1$  gegeben,  $y_1$  aber nicht, so ist leicht zu sehen, dass die gesuchten Kriterien durch das Zeichen des Ausdrucks

$$15) \quad a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'_1}{u_1}$$

gegeben werden.

Wären die oberen Grenzwerte fest und die unteren gegeben, so ist offenbar in dem Ausdrucke 14)  $x_0$  und  $y_0$  an die Stelle von  $x_1$  und  $y_1$  zu setzen und das Vorzeichen des Ausdrucks umzukehren.

## § 5.

### Beispiel für die Regeln des vorigen Paragraphen.

Ein geometrisches Beispiel ist folgendes. Es sei eine Curve gegeben und ein Punkt auf derselben; an dem Punkte ist der eine Endpunkt eines Fadens von gegebener Länge befestigt, während der andere Endpunkt sich auf der Curve bewegen kann; der Faden soll so gelegt werden, dass der Flächenraum, den er mit der gegebenen Curve einschliesst, ein Maximum wird.

Die Länge des Fadens sei  $l$ ; ich betrachte den Bogen  $s$  als unabhängige und den von dem gegebenen Punkte ausgehenden Radius vector  $r$  als abhängige Variable und setze  $\frac{dr}{ds} = r'$ ; ferner sei  $f(r)$  der Inhalt der zwischen dem Radius vector und der gegebenen Curve liegenden Fläche, so habe ich das Maximum zu suchen von

$$16) \quad V = \int_0^l \varphi(s, r, r') ds,$$

wo

$$17) \quad \varphi(s, r, r') = r \sqrt{1 - r'^2} + 2f'(r) \cdot r'.$$

Dies Problem führt auf die Differentialgleichung

$$18) \quad r = c_1 \sqrt{1 - r'^2},$$

welche integriert giebt



$$26) \quad a_{11} = -\cot \chi + 2f''(r_1, r_1),$$

$$27) \quad a_{02} = -\frac{c_1}{\sin^2 \chi}.$$

$$u = \sin \frac{s-c_2}{c_1} - \frac{s-c_2}{c_1} \cos \frac{s-c_2}{c_1},$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{s-c_2}{c_1^2} \sin \frac{s-c_2}{c_1} : \sin \frac{s-c_2}{c_1} - \frac{s-c_2}{c_1} \cos \frac{s-c_2}{c_1},$$

$$28) \quad \frac{u'_1}{u_1} = \frac{\chi \operatorname{tg} \chi}{c_1 (\operatorname{tg} \chi - \chi)}.$$

Der Ausdruck 15) wird somit für unsern Fall

$$29) \quad a_{11} + a_{02} \cdot \frac{u'_1}{u_1} = -\cot \chi + 2f''(r_1, r_1) - \frac{\chi}{\sin^2 \chi - \chi \sin \chi \cos \chi}.$$

Nun folgt durch Differentiation der Gleichung 22)

$$2f''(r, r) = 2r \frac{\delta \varphi}{\delta r} + r^2 \frac{\delta^2 \varphi}{\delta r^2}$$

oder, -wenn wir  $\frac{\delta r}{\delta \varphi}$ , abweichend von der früheren Bezeichnungsweise, mit  $r'$ ,  $\frac{\delta^2 r}{\delta \varphi^2}$  mit  $r''$  bezeichnen,

$$30) \quad 2f''(r, r) = \frac{2r}{r'} - \frac{r^2 r''}{r'^3}.$$

Nun ist, wenn  $\varrho$  der Krümmungsradius der gegebenen Curve ist,

$$\varrho = \frac{\sqrt{(r^2 + r'^2)^3}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \quad \frac{r}{r'} = \cot \chi.$$

Dadurch geht 30) über in

$$2f''(r_1, r_1) = -\cot^3 \chi + \frac{r}{\varrho \sin^3 \chi},$$

und gemäss 29) wird die Bedingung für das Stattfinden eines Maximums

$$31) \quad \frac{r}{\varrho} < \frac{\sin 2\chi - 2\chi \cos 2\chi}{2(\sin \chi - \chi \cos \chi)}.$$

Der Krümmungsradius  $\varrho C$ , welcher den vom Faden gebildeten Kreisbogen berührt, ist hierbei als negativ anzusehen, wenn er die Fortsetzung des Fadens bildet (Fig. 2), und als positiv, wenn er die entgegengesetzte Richtung hat (Fig. 3).

Nehmen wir zunächst den Fall an, dass die gegebene Curve aus zwei sich schneidenden geraden Linien  $AT$  und  $TQ$  besteht (Fig. 4), so ist  $\varrho = \infty$  und es wird darauf ankommen, ob der in 31) rechts stehende Ausdruck positiv oder negativ ist. Da  $\chi$  nicht grösser als  $\pi$  sein kann, sonst der Faden mehr als einen Umkreis vollenden müsste, so bleibt Nenner der rechten Seite von 31) stets positiv; der Zähler ist gleich positiv, so lange  $2\chi < 257^\circ 27' 12''$  ist, dagegen negativ, sobald  $2\chi$  im ersten Falle wird also ein Maximum stattfinden.



$$y = c_1 x + c_2.$$

Ich will in diesem Beispiel die vollständigen Variationen einfach mit  $\delta y_1$ ,  $\delta^2 y_1$  bezeichnen, da die partialen gar nicht vorkommen. Dann habe ich für die Grenzwerte die Gleichung

$$\varphi'(y'_1) \delta y_1 + [\varphi(x_1, y_1, y'_1) - y'_1 \varphi'(y'_1)] \delta x_1 = 0,$$

$$\frac{y'_1}{\sqrt{1+y'^2_1}} \delta y_1 + \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_1}} \delta x_1 = 0,$$

$$34) \quad y'_1 = -\frac{\delta x_1}{\delta y_1},$$

woraus sich der bekannte Satz ergibt, dass die Linie eine Normale der Curve sein muss.

Um zu untersuchen, wann ein wirkliches Minimum stattfindet, bilde ich mir den Ausdruck 33). Da  $\frac{\partial y}{\partial c_1} = x$ ,  $\frac{\partial y}{\partial c_2} = 1$ , also  $u = x - x_0$  ist, so erhalte ich mit Berücksichtigung von 34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\delta y_1^5}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}} - \frac{\delta x_1 \delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} + \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\delta x_1^2 \delta y_1^3}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}} \\ + \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \frac{\delta x_1^4 \delta y_1}{\sqrt{(\delta x_1^2 + \delta y_1^2)^3}} > 0 \end{aligned}$$

oder

$$35) \quad \frac{\delta y_1}{x_1 - x_0} \sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2} - \frac{\delta x_1 \delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} > 0.$$

Da  $\sqrt{1+y'^2} = \frac{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}}{\delta y_1}$  positiv zu nehmen ist, so muss  $\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}$  dasselbe Zeichen wie  $\delta y_1$  haben. Der Ausdruck 35) giebt mir daher die Bedingung

$$36) \quad \frac{1}{x_1 - x_0} > \frac{\delta x_1 \delta^2 y_1}{\delta y_1 (\delta x_1^2 + \delta y_1^2)},$$

woraus sich ergibt, dass ein Minimum jedenfalls dann stattfindet, wenn die Curve convex gegen den gegebenen Punkt ist; ist sie concav, so ist ein Minimum nur in dem Falle vorhanden, wenn der gegebene Punkt zwischen der Curve und ihrem Krümmungsmittelpunkte liegt, wie sich dieses Resultat auch mittelst der elementaren Theorie der Maxima und Minima finden lässt [Herr Prof. Dienger behandelt in seinem „Grundriss der Variationsrechnung“ dies Problem und kommt zu einem Ausdruck, der dasselbe besagt, wie 36); doch giebt er die geometrische Bedeutung seines Resultats nicht an].

## § 7.

Sowohl die oberen, als die unteren Grenzen sind variabel.

Der Ausdruck 8) oder 9) muss für alle Werthe, welche die  $\delta y$ ,  $\delta x$  annehmen, positiv sein. Ich denke mir jetzt irgend zwei Werthe





$$38) \quad \gamma_1 : \gamma_2 = \delta y_0 \frac{\partial y_1}{\partial c_2} - \delta y_1 \frac{\partial y_0}{\partial c_2} : - \delta y_0 \frac{\partial y_1}{\partial c_1} + \delta y_1 \frac{\partial y_0}{\partial c_1}.$$

Dass  $u$  bei diesen Werthen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  nicht verschwinden kann, dass wir somit  $\delta y = \varepsilon g u$  setzen dürfen, folgt aus folgender Betrachtung. Da  $\delta y_0$  und  $\delta y_1$ , nach 37) also auch  $u_0$  und  $u_1$ , dasselbe Zeichen haben, so müsste  $u$ , wenn es überhaupt zwischen den Grenzen verschwindet, sein Zeichen an dieser Stelle nicht wechseln, oder es müsste an mehr als einer Stelle verschwinden. Das Letztere ist dadurch ausgeschlossen, dass die Bedingungen des § 2 erfüllt sein müssen. Dass  $u$  verschwindet, ohne sein Zeichen zu wechseln, ist gleichfalls unmöglich, denn alsdann müsste auch  $u'$  verschwinden und wir hätten die beiden Gleichungen

$$\gamma_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y}{\partial c_2} = 0, \quad \gamma_1 \frac{\partial y'}{\partial c_1} + \gamma_2 \frac{\partial y'}{\partial c_2} = 0,$$

woraus sich ergeben würde

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} \frac{\partial y'}{\partial c_2} - \frac{\partial y}{\partial c_2} \frac{\partial y'}{\partial c_1} = 0$$

und folglich  $\frac{dq}{dx} = 0$ , was nach § 2 unmöglich ist.

Wir haben somit als fernere nothwendige Bedingung für ein Minimum:

Der in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehende Ausdruck muss positiv sein für alle Werthe von  $\delta x_0$  und  $\delta x_1$  und für diejenigen Werthe von  $\delta y_0$  und  $\delta y_1$ , welche gleiches Zeichen haben, wobei  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  so zu bestimmen sind, dass  $u_0 : u_1 = \delta y_0 : \delta y_1$ .

## § 8.

### Beispiel für den vorigen Paragraphen.

Um ein Beispiel zu geben, behandle ich das Problem, die kürzeste Linie zwischen zwei Curven zu ziehen.

Ebenso, wie in dem entsprechenden einfacheren Problem des § 6, folgt, dass die gesuchte Linie die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven ist. — Um die zweite Variation zu untersuchen, bilde ich den in 9) ausserhalb des Integralzeichens stehenden Ausdruck. Hierbei kann ich  $\delta^2 x = 0$  setzen und  $u = x - x'$ , wo  $x'$  eine noch zu bestimmende Constante ist; dann erhalte ich, ähnlich wie in § 6, für das Stattfinden eines Minimums folgende Bedingung:

$$39) \quad \left| \frac{[\delta y]}{x - x'} \sqrt{\delta x^2 + [\delta y]^2} - \frac{x [\delta^2 y]}{\sqrt{\delta x^2 + [\delta y]^2}} \right|_0^1 > 0.$$

Die Quadratwurzel hat hierbei wieder dasselbe Zeichen, wie  $[\delta y]$ . Nehmen wir an, dass  $\delta y_0$  und  $\delta y_1$  entgegengesetzte Vorzeichen haben, so muss  $x'$  so bestimmt werden, dass  $u$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$  ver-

schwindet; also muss die Bedingung 39) für alle zwischen  $x_0$  und  $x_1$  gelegenen Werthe von  $x'$  erfüllt werden. Dies wird der Fall sein, wenn wir die folgenden beiden Ungleichungen haben:

$$40) \quad \frac{[\delta y_1]}{x_1 - x'} \sqrt{\delta x_1^2 + [\delta y_1]^2} - \frac{\delta x_1 [\delta^2 y_1]}{\sqrt{\delta x_1^2 + [\delta y_1]^2}} > 0,$$

$$41) \quad \frac{[\delta y_0]}{x_0 - x'} \sqrt{\delta x_0^2 + [\delta y_0]^2} - \frac{\delta x_0 [\delta^2 y_0]}{\sqrt{\delta x_0^2 + [\delta y_0]^2}} < 0,$$

was zunächst nothwendige Bedingungen für das Stattfinden eines Minimums sind. — Nehmen wir an, dass  $\delta y_0$  und  $\delta y_1$  gleiches Vorzeichen haben, so ist  $x'$  aus Gleichung 37) zu bestimmen, d. h. wir haben

$$x_0 - x' : x_1 - x' = \delta y_0 : \delta y_1, \quad x' = \frac{x_0 \delta y_1 - x_1 \delta y_0}{\delta y_1 - \delta y_0},$$

$$x_1 - x' = \frac{(x_1 - x_0) \delta y_1}{\delta y_1 - \delta y_0}, \quad x_0 - x' = \frac{(x_1 - x_0) \delta y_0}{\delta y_1 - \delta y_0}$$

und wenn ich

$$\delta y_1 = [\delta y_1] - y'_1 \delta x_1 = [\delta y_1] + \frac{\delta x_1^2}{[\delta y_1]}, \quad \delta y_0 = [\delta y_0] + \frac{\delta x_0^2}{[\delta y_0]}$$

setze,

$$x_1 - x' = \frac{(x_1 - x_0)(\delta x_1^2 + [\delta y_1]^2)[\delta y_0]}{(\delta x_1^2 + [\delta y_1]^2)[\delta y_0] - (\delta x_0^2 + [\delta y_0]^2)[\delta y_1]},$$

$$x_0 - x' = \frac{(x_1 - x_0)(\delta x_0^2 + [\delta y_0]^2)[\delta y_1]}{(\delta x_1^2 + [\delta y_1]^2)[\delta y_0] - (\delta x_0^2 + [\delta y_0]^2)[\delta y_1]}.$$

Wenn ich dies in 39) einsetze und der einfacheren Schreibweise wegen die Klammern, in denen die Variationen stehen, fortlasse, so erhalte ich

$$42) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\delta y_1}{(x_1 - x_0) \sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} [(\delta x_1^2 + \delta y_1^2) \delta y_0 - (\delta x_0^2 + \delta y_0^2) \delta y_1] \\ & - \frac{\delta x_1 \delta^2 y_1}{\sqrt{\delta x_1^2 + \delta y_1^2}} \\ & - \frac{\delta y_0}{(x_1 - x_0) \delta y_1 \sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2}} [(\delta x_1^2 + \delta y_1^2) \delta y_0 - (\delta x_0^2 + \delta y_0^2) \delta y_1] \\ & + \frac{\delta x_0 \delta^2 y_0}{\sqrt{\delta x_0^2 + \delta y_0^2}} > 0. \end{aligned} \right.$$

Sind die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes  $\alpha_0, \beta_0$ , resp.  $\alpha_1, \beta_1$ , und die Krümmungsradien  $\varrho_0$  und  $\varrho_1$ , so habe ich allgemein

$$43) \quad \frac{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}{\delta x} = - \frac{\varrho}{y - \beta},$$

$$44) \quad \frac{\delta y}{\delta x} = - \frac{x - \alpha}{y - \beta},$$

$$45) \quad \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = - \frac{\varrho^2}{(y - \beta)^3}.$$

Hierdur

über in  
27

$$46) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\varrho_1 (x_0 - \alpha_1)}{(y_1 - \beta_1)^2 (x_1 - x_0)} \delta x_1^2 - \frac{(x_1 - \alpha_1)^3 \varrho_0^3 + (x_0 - \alpha_0)^3 \varrho_1^3}{\varrho_0 \varrho_1 (x_1 - x_0) (y_0 - \beta_0) (y_1 - \beta_1) (x_0 - \alpha_0) (x_1 - \alpha_1)} \delta x_0 \delta y_1 \\ & + \frac{\varrho_0 (x_1 - \alpha_0)}{(y_0 - \beta_0)^2 (x_1 - x_0)} \delta x_0^2 > 0. \end{aligned} \right.$$

Damit dieser Ausdruck eine definite quadratische Form ist, muss man haben

$$47) \left\{ \begin{aligned} & \varrho_0^3 \varrho_1^3 (x_0 - \alpha_0)^2 (x_1 - \alpha_1)^2 [(x_0 - \alpha_1)(x_1 - \alpha_0) - \frac{1}{2} (x_0 - \alpha_0)(x_1 - \alpha_1)] \\ & - \frac{1}{4} \varrho_0^6 (x_1 - \alpha_1)^6 - \frac{1}{4} \varrho_1^6 (x_0 - \alpha_0)^6 > 0. \end{aligned} \right.$$

Beachtet man, dass  $\frac{x_0 - \alpha_0}{\varrho_0} = \frac{x_1 - \alpha_1}{\varrho_1}$ , so geht 47) über in

$$48) \quad (x_0 - \alpha_0)^5 (x_1 - \alpha_1)^5 (x_1 - x_0) (\alpha_1 - \alpha) < 0.$$

Damit 46) nun auch eine positive Form wird, muss  $\varrho_1 (x_0 - \alpha_1) > 0$  sein. Da die Quadratwurzel des Ausdrucks 42) dasselbe Zeichen haben muss, wie  $\delta y$ , so folgt aus 43) und 44), dass das Zeichen von  $\varrho$  gleich dem von  $x - \alpha$  zu nehmen ist. Die letztere Bedingung kann ich also auch schreiben

$$49) \quad (x_1 - \alpha_1)(x_0 - \alpha_1) > 0.$$

Zu diesen Bedingungen kommen noch die früher gefundenen 40) und 41), welche sich schreiben lassen

$$50) \quad \frac{1}{x_1 - \alpha_1} < \frac{1}{x_1 - x'},$$

$$51) \quad \frac{1}{x_0 - \alpha_0} > \frac{1}{x_0 - x'}$$

und für alle zwischen  $x_0$  und  $x_1$  liegenden Werthe von  $x'$  erfüllt werden müssen. Die vier Ungleichungen 48) bis 51) bilden somit die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Stattfinden eines Minimums.

$AB$  sei die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven,  $a$  der Krümmungsmittelpunkt der ersten Curve im Punkte  $A$ ,  $b$  der der zweiten Curve im Punkte  $B$ . Sind die beiden Curven convex gegen einander, wie in Fig. 7, so ist  $x_0 > \alpha_0$ ,  $x_1 < \alpha_1$ ,  $\alpha_1 > \alpha_0$ ; folglich werden sämtliche Bedingungen erfüllt und es findet sicher ein Minimum statt. Sind die Curven concav gegen einander, wie in Fig. 8, so ist  $x_0 < \alpha_0$ ,  $x_1 > \alpha_1$ , soll somit die Bedingung 48) erfüllt werden, so muss  $\alpha_1 > \alpha_0$  sein; in diesem Falle wäre aber  $x_0$  sicher kleiner als  $\alpha_1$ , folglich würde die Bedingung 49) nicht erfüllt werden; es kann somit kein Minimum stattfinden.

Ist die Curve, auf welcher der Anfangspunkt liegt, concav gegen diejenige, auf der der Endpunkt liegt, diese aber gegen jene convex, wie in Fig. 9 und 10, so haben wir  $x_0 < \alpha_0$ ,  $x_1 < \alpha_1$ , somit sind die Bedingungen 49) und 50) erfüllt; die Bedingung 48) dagegen wird nur dann erfüllt sein, wenn  $\alpha_0 > \alpha_1$ , wie in Fig. 10, und da dann auch  $\alpha_1 > \alpha_1$ , so ist auch 51) erfüllt. Nur Fig. 10, nicht aber Fig. 9 wird uns

**liefern.**

Ist umgekehrt, wie in Fig. 11 und 12, die Anfangscurve gegen die Endcurve convex und diese gegen jene concav, so habe ich  $x_0 > \alpha_0$ ,  $x_1 > \alpha_1$ , also Bedingung 51) ist erfüllt; Bedingung 48) wird wieder nur dann erfüllt sein, wenn  $\alpha_0 > \alpha_1$ , wie in Fig. 12, und da in diesem Falle  $x_0 > \alpha_1$ , so sind auch die Bedingungen 49) und 50) erfüllt. Nur Fig. 12, nicht aber Fig. 11 wird ein Minimum geben.

Die Figuren 7, 10 und 12 stellen uns somit die Fälle dar, in welchen ein Minimum stattfindet, und die Figuren 8, 9 und 11 diejenigen Fälle, in welchen ein Minimum nicht vorhanden ist. Das Resultat unserer Untersuchung ist daher folgendes:

Die Strecke  $AB$  wird das Minimum der Entfernung der beiden Curven stets dann darstellen, wenn dieselben in den Punkten  $A$  und  $B$  convex gegen einander sind; es wird nie ein Minimum stattfinden, wenn beide Curven concav gegen einander sind; ist die eine gegen die andere concav und diese gegen jene convex, so wird ein Minimum nur dann statthaben, wenn  $A$  und  $a$  beide zwischen  $B$  und  $b$ , oder  $B$  und  $b$  beide zwischen  $A$  und  $a$  liegen.

Königsberg, 3. März 1878.

## XVII.

### Oscillatorische Bewegung eines verlängerten Rotationsellipsoids infolge der Anziehung eines weit entfernten Punktes.

Von  
Dr. ARNOLD GIESEN.

Hierzu Taf. VI, Fig. 13 — 15.

#### § 1. Bestimmung der an dem Ellipsoid wirkenden Kräfte.

Auf ein homogenes, verlängertes Rotationsellipsoid (Fig. 13), welches um seinen festen Mittelpunkt drehbar ist, wirkt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze ein weit entfernter materieller Punkt. Der Radius des Aequators des Ellipsoids sei  $a$ , die halbe Rotationsaxe sei  $c$ . Wir legen ferner ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde, dessen  $xy$ -Ebene in die Aequatorebene des Ellipsoids fällt und dessen  $xz$ -Ebene den anziehenden Punkt  $\mu$  enthält; die Coordinaten des letzteren seien  $\alpha$  und  $\gamma$  (entsprechend  $x$  und  $z$ ). Dabei ist der Mittelpunkt des Ellipsoids der Coordinatenanfangspunkt und die Coordinatenachsen sind Hauptträgheitsachsen. Ein Punkt des Ellipsoids habe die Coordinaten  $x, y, z$ , dann ist die Entfernung desselben von  $\mu$ , welche wir  $r$  nennen wollen,

$$r = \sqrt{(\gamma - z)^2 + y^2 + (\alpha - x)^2}.$$

Die Anziehung, welche der fragliche Punkt von  $\mu$  erleidet, ist also

$$\frac{\mu \cdot dm \cdot f}{r^2},$$

wenn  $\mu$  und  $dm$  die Massen der beiden Punkte und  $f$  die constante Elementaranziehung bedeuten. Die Componenten dieser Anziehung nach den drei Axen sind

$$\frac{\mu f dm (\alpha - x)}{r^3}, \quad - \frac{\mu f dm y}{r^3}, \quad \frac{\mu f dm (\gamma - z)}{r^3}.$$

Für  $r$  wollen wir jetzt einen genäherten Ausdruck setzen. Dazu nennen wir die Entfernung des Punktes  $\mu$  vom Mittelpunkte des Ellipsoids  $R$  und haben dann



Die Summen sind natürlich über die ganze Masse des Ellipsoids auszu-  
dehnen. Beachten wir nun, dass der Ursprung im Schwerpunkte des  
Ellipsoids liegt und dass die Coordinatenachsen die Hauptträgheitsachsen des  
Ellipsoids sind, so sieht man, dass folgende Summen

$$\begin{aligned} \Sigma x \, dm, \quad \Sigma y \, dm, \quad \Sigma z \, dm, \\ \Sigma x y \, dm, \quad \Sigma x z \, dm, \quad \Sigma y z \, dm \end{aligned}$$

sämmtlich gleich Null werden. Demnach werden obige Componenten des  
Gegenpaares:

$$\text{II)} \quad L = 0; \quad M = 3 \mu f \frac{\alpha \gamma}{R^5} \Sigma (z^2 - x^2) \, dm, \quad N = 0.$$

Diese Werthe zeigen, dass die Axe des resultirenden Gegenpaares nach  
der  $y$ -Axe gerichtet ist, das Gegenpaar demnach in der Ebene liegt,  
welche durch die Axe des Ellipsoids und den angrenzenden Punkt geht.  
Bezeichnen wir dasselbe fortan mit  $G$ , um mit  $M$  die Masse des Ellipsoids  
bezeichnen zu können, so haben wir weiter

$$G = 3 \mu f \frac{\alpha \gamma}{R^5} \Sigma [(z^2 + y^2) \, dm - (x^2 + y^2) \, dm]$$

oder weiter

$$G = 3 \mu f \frac{\alpha \gamma}{R^5} \left[ \frac{M}{5} (a^2 + c^2) - \frac{M}{5} (a^2 + a^2) \right],$$

indem  $\Sigma (z^2 + y^2) \, dm$  und  $\Sigma (x^2 + y^2) \, dm$  die Trägheitsmomente des Ellip-  
soids bezüglich nach der  $x$ - und  $z$ -Axe sind, welche die Werthe haben  
 $\frac{M}{5} (a^2 + c^2)$  und  $\frac{M}{5} (a^2 + a^2)$ .

Nennt man  $\vartheta$  den Winkel, welchen die Linie  $R$  mit der Rotations-  
axe  $c$  bildet, so ist

$$\gamma = R \cos \vartheta, \quad \alpha = R \sin \vartheta,$$

so dass wir endlich für das Gegenpaar folgenden Ausdruck erhalten:

$$\text{III)} \quad G = \frac{3 \mu f M (c^2 - a^2)}{5 R^3} \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Ein positives Paar strebt bekanntlich eine Drehung hervorzubringen,  
durch welche die positive  $z$ -Axe in die positive  $x$ -Axe gelangt. Ist also  
das Ellipsoid ein abgeplattetes, so strebt  $G$ , die ungleiche Axe des El-  
lipsoids senkrecht zu stellen zur Verbindungslinie  $R$ ; ist dagegen das  
Ellipsoid verlängert, so strebt das Paar, die ungleiche Axe in jene Ver-  
bindungslinie zu drehen. Der letztere Fall ist es, welcher uns hier an-  
geht. In beiden Fällen ist das Ellipsoid im Gleichgewichte, sowohl wenn  
seine ungleiche Axe in die gedachte Linie  $R$  fällt, als wenn beide auf  
einander senkrecht stehen. Bei abgeplatteten Ellipsoiden ist ersteres die  
• labile, letzteres die stabile Gleichgewichtslage, umgekehrt bei verlänger-  
ten Ellipsoiden.

## § 2. Zweite Bestimmungsmethode der an dem Ellipsoid wirkenden Kräfte.

Wir wollen jetzt sehen, wie sich dieselbe Formel für das Gegenpaar aus der allgemeinen Formel für das Potential eines Ellipsoids ableiten lässt.

Das Potential eines homogenen Ellipsoids mit den Halbaxen  $a, b, c$  in einem äussern Punkte  $(x, y, z)$  wird bekanntlich ausgedrückt durch die Formel

$$V_a = abc\pi \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2+t} - \frac{y^2}{b^2+t} - \frac{z^2}{c^2+t}\right),$$

wenn  $\sigma$  die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\sigma} + \frac{y^2}{b^2+\sigma} + \frac{z^2}{c^2+\sigma} = 1$$

darstellt.

Hieraus findet man zunächst, wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)} = D$$

gesetzt wird,

$$\frac{\partial V_a}{\partial x} = -abc\pi \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{D} \frac{2x}{a^2+t},$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial y} = -abc\pi \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{D} \frac{2y}{b^2+t},$$

$$\frac{\partial V_a}{\partial z} = -abc\pi \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{D} \frac{2z}{c^2+t}.$$

Multipliziert man diese drei Ausdrücke noch mit der constanten Dichtigkeit  $\rho$  des Ellipsoids, der Masse  $\mu$  des angezogenen Punktes und der constanten Elementaranziehung  $f$ , so erhält man die Componenten der Kraft, welche das Ellipsoid auf den Punkt  $\mu$  ausübt.

Sowie aber das Ellipsoid den Punkt  $\mu$  anzieht, zieht auch dieser das Ellipsoid an, beide Kräfte sind entgegengesetzt gleich. Die Richtung der Kraft, der das Ellipsoid unterworfen ist, geht durch  $(x, y, z)$  und ihre Componenten sind entgegengesetzt gleich den vorherbestimmten. Für unsern Fall ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, wir setzen daher  $a=b$ ; der Punkt  $(x, y, z)$  liegt in der  $xz$ -Ebene, seine  $y$ -Coordinate ist daher gleich Null und folglich auch die  $y$ -Componente der Anziehung. Für die beiden anderen Componenten erhalten wir also die Ausdrücke

$$X = 2\mu f \rho a^2 c \pi \cdot x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)^{3/2} (c^2+t)^{3/2}},$$





$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \left[ -\frac{2}{3} \frac{1}{t^{1/2}} + \frac{1}{5} \frac{4a^2+c^2}{t^{1/2}} \right]_{\sigma}^{\infty} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma^{1/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5} \frac{1}{\sigma^{1/2}}$$

und, indem wir für  $\sigma$  den obigen Werth setzen,

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\left(x^2+z^2 - \frac{a^2x^2+c^2z^2}{x^2+z^2}\right)^{1/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5} \frac{1}{(x^2+z^2)^{1/2}},$$

wobei im letzten Gliede für  $\sigma$  einfach  $x^2+z^2$  gesetzt wurde, welches jedenfalls gestattet ist. Hieraus folgt nun durch Entwicklung des ersten Gliedes

$$\int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{1/2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{(x^2+z^2)^{1/2}} + \frac{a^2x^2+c^2z^2}{(x^2+z^2)^{3/2}} - \frac{4a^2+c^2}{5} \frac{1}{(x^2+z^2)^{1/2}}.$$

Das zweite Glied ist seines Zählers wegen von derselben Ordnung wie das letzte. Aus dieser Formel ergibt sich sogleich  $X$ , wenn wir die Entfernung des anziehenden Punktes vom Mittelpunkte wieder mit  $R$  bezeichnen:

$$I) \quad X = \frac{1}{3} \mu f \varrho a^2 c \pi \frac{x}{R^3} + 2 \mu f \varrho a^2 c \pi x \frac{a^2 x^2 + c^2 z^2}{R^7} - \frac{2}{5} \mu f \varrho a^2 c \pi x \frac{4a^2 + c^2}{R^5}.$$

Nun müssen wir  $z$  bilden. Wir haben ganz wie vorhin

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a^2+t)(c^2+t)^{1/2}} &= t^{-1} \left(1 + \frac{a^2}{t}\right)^{-1} \cdot t^{-1/2} \left(1 + \frac{c^2}{t}\right)^{-1/2} \\ &= t^{-3/2} \left(1 - \frac{a^2}{t}\right) \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{t}\right) = t^{-3/2} \left(1 - \frac{a^2}{t} - \frac{1}{2} \frac{c^2}{t}\right) \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{2a^2 + 3c^2}{t^{5/2}} \end{aligned}$$

und hieraus durch Integration

$$\begin{aligned} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dt}{(a^2+t)(c^2+t)^{1/2}} &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sigma^{1/2}} - \frac{1}{5} \frac{2a^2 + 3c^2}{\sigma^{1/2}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{\left(x^2+z^2 - \frac{a^2x^2+c^2z^2}{x^2+z^2}\right)^{1/2}} - \frac{1}{5} \frac{2a^2 + 3c^2}{(x^2+z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{R^3} + \frac{a^2x^2+c^2z^2}{R^7} - \frac{1}{5} \frac{2a^2 + 3c^2}{R^5} \end{aligned}$$

und demnach

$$II) \quad Z = \frac{1}{3} \mu f \varrho a^2 c \pi \frac{z}{R^3} + 2 \mu f \varrho a^2 c \pi z \frac{a^2 x^2 + c^2 z^2}{R^7} - \frac{2}{5} \mu f \varrho a^2 c \pi z \frac{2a^2 + 3c^2}{R^5}.$$

Hätten wir früher  $\sigma$  direct  $= x^2+z^2$  gesetzt, so würden die Formeln für  $X$  und  $Z$  die zweiten Glieder

durch eine massenlose Linie, beiderseits vom Ursprunge gleichweit entfernt, verbunden sind, die sich um den Ursprung drehen kann. Die halbe Länge des Hebels sei  $l$ ,  $\vartheta$  und  $R$  behalten ihre Bedeutung (Fig. 14). Die Componenten der Anziehung, welche  $A$  erleidet, sind

$$\frac{m\mu f}{r_1^2} \frac{\alpha}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{m\mu f}{r_2^2} \frac{\gamma}{r_2};$$

diejenigen, welche  $B$  erleidet, sind

$$\frac{m\mu f}{r_2^2} \frac{\alpha}{r_2} \quad \text{und} \quad \frac{m\mu f}{r_2^2} \frac{\gamma}{r_2},$$

wenn  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen bezüglich der Punkte  $A$  und  $B$  vom anziehenden Punkte  $\mu$  bedeuten. Die letzteren, d. h. die  $z$ -Componenten, erzeugen kein Paar. Nun ist

$$r_1^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos \vartheta, \quad r_2^2 = R^2 + l^2 + 2Rl \cos \vartheta,$$

also

$$\frac{1}{r_1^3} = (R^2 + l^2 - 2Rl \cos \vartheta)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} + \frac{3l \cos \vartheta}{R^4},$$

$$\frac{1}{r_2^3} = (R^2 + l^2 + 2Rl \cos \vartheta)^{-3/2} = \frac{1}{R^3} - \frac{3l \cos \vartheta}{R^4},$$

also sind die  $x$ -Componenten der an  $A$  und  $B$  wirkenden Kräfte

$$\frac{m\mu f \alpha}{R^3} + \frac{3m\mu f \alpha l \cos \vartheta}{R^4} \quad \text{und} \quad \frac{m\mu f \alpha}{R^3} - \frac{3m\mu f \alpha l \cos \vartheta}{R^4}.$$

Die beiden Componenten

$$\frac{m\mu f \alpha}{R^3}$$

an beiden Punkten erzeugen kein Paar, sondern halten sich das Gleichgewicht. Die beiden Theile, welche das Paar erzeugen, sind also nur

$$+ \frac{3m\mu f \alpha l \cos \vartheta}{R^4} \quad \text{und} \quad - \frac{3m\mu f \alpha l \cos \vartheta}{R^4}.$$

Der Hebelarm des Paares ist  $2l$  und also das Paar selbst

$$\frac{6m\mu f l^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{R^3}.$$

Das aus der stattfindenden Bewegung abgeleitete Paar ist

$$-J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2},$$

wenn  $J$  das Trägheitsmoment der beiden Punkte in Bezug auf die Drehaxe ist; dieses ist  $= 2ml^2$ . Daher wird die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = - \frac{3\mu f \cos \vartheta \sin \vartheta}{R^3}.$$

Die Bewegung hängt hiernach also gar nicht von der Masse der beiden Punkte  $A$  und  $B$ , auch nicht von ihrer Entfernung  $l$  ab, sondern nur von der Lage des anziehenden Punktes, seiner Masse und der constan-







Rechnen wir dagegen die Zeit von dem Punkte aus, wo das Ellipsoid durch die stabile Gleichgewichtslage geht, und bezeichnen dann dieselbe mit  $t'$ , so kommt

$$t' = \frac{1}{4} T - t = \frac{A}{\sqrt{2}} F \left[ \sin \vartheta_0, \arcsin \left( \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \right) \right]$$

oder

$$\text{III)} \quad t' = R \sqrt{\frac{R(c^2 + a^2)}{3\mu f(c^2 - a^2)}} F \left[ \sin \vartheta_0, \arcsin \left( \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \right) \right].$$

Nun handelt es sich aber weniger darum, die Zeit aus dem Elongationswinkel zu finden, als vielmehr umgekehrt, den Elongationswinkel aus der gegebenen Zeit zu finden. Kehren wir daher die vorige Gleichung um, wozu uns die elliptischen Functionen die Mittel bieten, so kommt

$$\arcsin \left( \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta_0} \right) = \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right),$$

$$\text{IV)} \quad \sin \vartheta = \sin \vartheta_0 \sin \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right)_{\text{mod} = \sin \vartheta_0}.$$

Hieraus ergibt sich sogleich weiter

$$\text{V)} \quad \cos \vartheta = \Delta \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right)_{\text{mod} = \sin \vartheta_0}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit. Darnämlich

$$\frac{d \sin \text{am} u}{du} = \cos \text{am} u \Delta \text{am} u,$$

so folgt aus IV)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{d \vartheta}{dt} &= \sin \vartheta_0 \cos \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right) \Delta \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right) \\ &\quad \times \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}}, \end{aligned}$$

folglich

$$\text{VI)} \quad \frac{d \vartheta}{dt} = \frac{\sin \vartheta_0}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cos \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right)_{\text{mod} = \sin \vartheta_0}.$$

Setzen wir  $t' = 0$  oder  $= \frac{1}{4} T$  oder überhaupt  $= \frac{n}{2} T$ , wo  $n$  eine positive ganze Zahl ist, so erhalten wir die Winkelgeschwindigkeit im tiefsten Punkte. Für  $t' = 0$  wird zunächst

$$\left( \frac{d \vartheta}{dt} \right) = \frac{\sin \vartheta_0}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}},$$

da  $\cos \text{am} 0 = 1$  ist. Setzen wir  $t' = \frac{n}{2} T$ , so kommt zuerst

$$\cos \text{am} \left( \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\mu f(c^2 - a^2)}{R(c^2 + a^2)}} \cdot t' \right) = \cos \text{am} [2n K(\sin \vartheta_0)] = \cos n\pi = \pm 1,$$













### § 5. Der anziehende Punkt besitzt selbst eine kleine Oscillation.

Wir wollen jetzt endlich noch die Voraussetzung machen, der anziehende Punkt  $\mu$  oscillire selbst auf einem um den Mittelpunkt des Ellipsoids mit dem Halbmesser  $R$  beschriebenen Kreise um eine Mittellage  $O$ , aber so, dass seine Amplitude  $\vartheta$  immer sehr klein bleibt. (Fig. 15.) Der Winkel, welchen die Rotationsaxe des Ellipsoids mit dem nach  $O$  gezogenen Radius vector bildet, heisse  $\tau$ , ferner möge  $t$  die Zeit,  $G$  das auf das Ellipsoid wirkende Gegenpaar,  $J$  sein Trägheitsmoment,  $c$  seine Rotations- und  $a$  seine Aequatorealhalbaxe, endlich  $f$  die Attractionsconstante bezeichnen.

Die Schwingungen des Punktes  $\mu$  um seine Mittellage  $O$  seien ausgedrückt durch die Gleichung

$$\text{I)} \quad \vartheta = \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

unter  $\delta$  die Dauer einer ganzen Schwingung und unter  $\vartheta_0$  die grösste Winkeldistanz von der Mittellage  $O$  verstanden. Dann heisst die Bewegungsgleichung

$$J \frac{d^2 \tau}{dt^2} - G = 0.$$

Nun ist nach III), § 1,

$$G = \frac{3}{5} \mu f M \frac{(c^2 - a^2)}{R^3} \sin(\vartheta - \tau) \cos(\vartheta - \tau).$$

Ferner ist

$$J = \frac{M}{5} (c^2 + a^2).$$

Dadurch kommt

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} - \frac{3 \mu f (c^2 - a^2)}{R^3 (c^2 + a^2)} \sin(\vartheta - \tau) \cos(\vartheta - \tau) = 0.$$

Da nun nach Annahme  $\vartheta$  und  $\tau$  stets klein bleiben sollen, so setzen wir für eine angenäherte Behandlung

$$\cos(\vartheta - \tau) = 1, \quad \sin(\vartheta - \tau) = \vartheta - \tau$$

und ebenso der Kürze wegen

$$\frac{3 \mu f (c^2 - a^2)}{R^3 (c^2 + a^2)} = H^2.$$

Dann wird die Bewegungsgleichung des Ellipsoids

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} + H^2 \tau = H^2 \vartheta$$

oder

$$\frac{d^2 \tau}{dt^2} + H^2 \tau = H^2 \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t.$$

Wenn wir nun noch  $\frac{2\pi}{\delta}$  mit  $\alpha$  bezeichnen und für  $\alpha t$  die neue Variable  $x$  einführen, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\alpha^2 \frac{d^2 \tau}{dx^2} + H^2 \tau = H^2 \vartheta_0 \sin x$$

oder

$$\frac{\alpha^2}{H^2 \vartheta_0} \frac{d^2 \tau}{dx^2} + \frac{1}{\vartheta_0} \tau = \sin x.$$

Endlich setzen wir noch für  $\frac{\alpha^2}{H^2 \vartheta_0} \tau$  die neue Variable  $y$  und erhalten so

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{H^2}{\alpha^2} y = \sin x.$$

Die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + b y = f(x)$$

hat bekanntlich als Integral

$$y = \frac{\left( C_1 + \int f(x) e^{-m_1 x} dx \right) e^{m_1 x} - \left( C_2 + \int f(x) e^{-m_2 x} dx \right) e^{m_2 x}}{m_1 - m_2},$$

unter  $m_1$  und  $m_2$  die Wurzeln der Gleichung

$$m^2 + am + b = 0$$

verstanden. Setzen wir  $f(x) = \sin x$ , so erhalten wir

$$y = \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} + \frac{e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} \sin x dx - e^{m_2 x} \int e^{-m_2 x} \sin x dx}{m_1 - m_2}.$$

Nun ist aber

$$\int e^{-m x} \sin x dx = -\frac{m \sin x + \cos x}{m^2 + 1} e^{-m x};$$

demnach kommt also

$$\begin{aligned} y &= \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} - \frac{\frac{m_1 \sin x + \cos x}{m_1^2 + 1} - \frac{m_2 \sin x + \cos x}{m_2^2 + 1}}{m_1 - m_2} \\ &= \frac{C_1 e^{m_1 x} - C_2 e^{m_2 x}}{m_1 - m_2} + \frac{(m_1 m_2 - 1) \sin x + (m_1 + m_2) \cos x}{(m_1^2 + 1)(m_2^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Nun ist in unserm Falle

$$m_1 = +\frac{H}{\alpha} i, \quad m_2 = -\frac{H}{\alpha} i,$$

$$m_1 m_2 = \frac{H^2}{\alpha^2}, \quad m_1 + m_2 = 0, \quad m_1 - m_2 = 2 \frac{H}{\alpha} i.$$

Daher kommt

$$\begin{aligned} y &= \frac{(C_1 - C_2) \cos \frac{H}{\alpha} x + (C_1 + C_2) i \sin \frac{H}{\alpha} x}{2 \frac{H}{\alpha} i} + \frac{\left( \frac{H^2}{\alpha^2} - 1 \right) \sin x}{\left( \frac{H^2}{\alpha^2} - 1 \right)^2} \\ &= C' \sin \frac{H}{\alpha} (x + c') + \frac{\sin x}{\frac{H^2}{\alpha^2} - 1}, \end{aligned}$$

unter  $C'$  und  $c'$  die beiden Integrationsconstanten verstanden. Wir setzen nun nach dem Früheren

$$\tau = \frac{H^2 \vartheta_0}{\alpha^2} y \quad \text{und} \quad x = \alpha t = \frac{2\pi}{\delta} t$$

und erhalten, unter  $C$  und  $c$  zwei neue Integrationsconstanten verstanden,

$$\text{II)} \quad \tau = \frac{H^2}{H^2 - \alpha^2} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin H(t + c).$$

Wenn der anziehende Punkt  $\mu$  in seiner bisherigen Mittellage  $O$  festliegend gedacht wird, so ist  $\vartheta_0 = 0$  zu setzen und die Bewegung wird dargestellt durch

$$\tau' = C \sin H(t + c),$$

woraus hervorgeht, dass man für die Oscillationsdauer  $\Delta$  des Ellipsoids in diesem Falle hat

$$\Delta = \frac{2\pi}{H}$$

oder nach dem Obigen [übereinstimmend mit XII) in § 3]

$$\text{III)} \quad \Delta = 2\pi R \sqrt{\frac{R(c^2 + a^2)}{3\mu f(c^2 - a^2)}}.$$

Hiernach gestaltet sich Gleichung II) folgendermassen:

$$\text{IV)} \quad \tau = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \Delta^2} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin \frac{2\pi}{\Delta} (t + c).$$

Für den Mond ist  $\frac{v^2}{R} = \frac{\mu f}{R^2}$ , also  $\frac{v}{R}$  oder die Winkelgeschwindigkeit  $= \sqrt{\frac{\mu f}{R^3}}$ . Hiernach findet sich für seine Umlaufszeit

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\mu f}}$$

und daraus weiter

$$\Delta = T \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{\frac{1}{3} \frac{c^2 - a^2}{1}}}$$

$\vartheta$  kann man als die Libration des Mondes in der Länge betrachten,\* wobei dann für  $\delta$  natürlich  $T$  zu setzen ist. Hierdurch kommt

$$\tau = - \frac{1}{\frac{1}{3} \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - 1} \vartheta_0 \sin \frac{2\pi}{\delta} t + C \sin \frac{2\pi}{\Delta} (t + c).$$

Ueber die Axenverhältnisse des Mondes vergleiche man des Verfassers Abhandlung: „Ueber eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellip-

---

\* Man bedenke, dass für die entwickelten Formeln nur die relative Bewegung von Erde und Mond in Betracht kommt. Mit Rücksicht auf Gleichung man Laplace, *Méc. cél.* T. III, l. 7, n. 21 und T. II, l. 5, n. 15.

---

soide mit kleinen Excentricitäten vorkommen“, I. Theil § 2, Jahrgang XXI, 1 dieser Zeitschrift.\* Offenbar erhielt man für  $\tau$  eine Formel von derselben Gestalt bei der Annahme, dass die auf der Ebene des Winkels  $\tau$  senkrecht stehende Axe des Ellipsoids die kürzeste sei.

Die Rotation des Mondes um seine Axe ist gleichförmig und ihre Dauer sehr nahe gleich der Umlaufszeit um die Erde. Da die letztere nicht gleichförmig ist, so wird durch diesen Unterschied die Libration in der Länge bedingt. Es ist unwahrscheinlich, dass die anfängliche Rotationsgeschwindigkeit genau gleich der mittleren Umlaufgeschwindigkeit war. Waren aber beide verschieden und hätte keine weitere Wirkung stattgefunden, so hätte im Laufe der Zeit eine merkliche Ablenkung der Mondaxe eintreten müssen. Aus dem Vorhergehenden leuchtet nun ein, wie dadurch, dass die grösste Mondaxe der Erde zugekehrt ist, diese Axe um die Lage, welche sie einnähme, wenn die Rotations- und Umlaufgeschwindigkeit genau gleich und keine weiteren Wirkungen vorhanden wären, um Weniges herumschwankt, wofern nur der anfängliche Unterschied zwischen der Rotations- und mittleren Umlaufgeschwindigkeit nicht allzu bedeutend war.

---

\* Dasselbst S. 52 Z. 2 v. o. lese man: „ $b$  steht“ statt „besteht“.

---



## Kleinere Mittheilungen.

---

### XVIII. Ueber die Verallgemeinerung einer Erzeugungsart der Curven zweiten Grades.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 16—18.)

Die Erzeugungsweisen der Curven lassen sich eintheilen in metrische und projectivische. Je nachdem die Curve in ihrer Erzeugung oder als fertiges Gebilde betrachtet wird, finden jene ihre analytische Darstellung vermittelt der inneren oder der complexen, diese vermittelt der äusseren oder der algebraischen Multiplication. — Nur die Curven zweiten Grades scheinen bis jetzt nach allen diesen Richtungen hin untersucht zu sein, und zwar waren es bei diesen die einfachen metrischen Erzeugungsweisen (des Kreises mittelst Zirkel, der Ellipse mittelst der bekannten Fadenconstruction), welche sich der Untersuchung zuerst darboten. Erst die neuere Zeit brachte für diese und bald auch für die höheren Curven die projectivischen Erzeugungsweisen, während die metrische Erzeugung der letzteren noch im Rückstand geblieben ist.

Im Folgenden soll eine Verallgemeinerung der metrischen Erzeugung der Curven zweiten Grades versucht werden, wobei es vorzugsweise darauf ankommen wird, im Allgemeinen festzustellen, welche Resultate sich von Untersuchungen dieser Art erwarten lassen.

Wenn die elementare Aufgabe gestellt wird, den Ort eines Punktes zu bestimmen, für welchen die Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten constant ist, so dass

$$r_1 + r_2 = c,$$

so ergibt sich bekanntlich als Lösung eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem  $r_1$  und  $r_2$  gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Und wenn  $e$  die Entfernung der beiden Punkte ist, so ist stets nur die Ellipse oder die Hyperbel reell, je nachdem  $c >$  oder  $< e$ . Versteht man daher in obiger Aufgabe unter „Summe“ die algebraische Summe (beide Fälle:  $r_1 + r_2$  und  $r_1 - r_2$  umfassend), so ist der Ort des Punktes ein Paar von Kegelschnitten, von denen der eine reell, der andere imaginär ist. Oder: Für einen bestimmten Werth von  $c$  liefert stets nur einer der beiden Fälle ( $r_1 + r_2$ ) und ( $r_1 - r_2$ ) eine reelle Curve.



$$(x_3 \varepsilon_2 - x_2 \varepsilon_3)^2 = x_2^2 + x_3^2 + (x_2 + x_3)^2.$$

Wenn wir diesen und die analog gebildeten Ausdrücke in der Gleichung 3) einsetzen, so geht sie über in

$$\sqrt{x_2^2 + x_3^2 + (x_2 + x_3)^2} + \sqrt{x_3^2 + x_1^2 + (x_3 + x_1)^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2} = s$$

oder, wenn wir die Klammern lösen, durch  $\sqrt{2}$  dividiren und  $s : \sqrt{2} = \lambda$  setzen,

$$4) \sqrt{x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2} + \sqrt{x_3^2 + x_3 x_1 + x_1^2} + \sqrt{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2} = \lambda,$$

wobei man, um die Homogenität herzustellen, zu  $\lambda$  noch den Factor  $(x_1 + x_2 + x_3)$  fügen kann.

Die Gleichung 4) ist nun die Gleichung einer Curve, welche den geometrischen Ort des Punktes  $x$  repräsentirt. Um diese Gleichung zu transformiren, schreiben wir sie in der Form

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \lambda,$$

schaffen  $\sqrt{c}$  nach rechts und erhalten durch eine kurze Rechnung, wobei noch

$$c - a - b = d$$

gesetzt wird,

$$16\lambda^2(\lambda^2 + d)^2 c = [(\lambda^2 + d)^2 + 4\lambda^2 c - 4ab]^2.$$

Löst man dann die Klammern, ordnet nach Potenzen von  $\lambda^2$  und stellt die Coefficienten derselben durch die Ausdrücke  $(d - 2c)$  und  $(d^2 - 4ab)$  dar, so findet sich leicht, dass die Gleichung sich auf folgende Form bringen lässt:

$$5) [\lambda^4 + 2\lambda^2(d - 2c) + (d^2 - 4ab)]^2 = 64\lambda^2 abc.$$

Setzt man noch

$$6) x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = v,$$

so ergibt sich in Verbindung mit 2)

$$a = 1 - v - x_1, \quad b = 1 - v - x_2,$$

$$c = 1 - v - x_3, \quad d = v - 2x_3,$$

$$(d - 2c) = 3v - 2, \quad (d^2 - 4ab) = -3v^2, \quad abc = v^2 - v^3 - x_1 x_2 x_3.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in 5) erhält man

$$7) [\lambda^4 + 2\lambda^2(3v - 2) - 3v^2]^2 = 64\lambda^2(v^2 - v^3 - x_1 x_2 x_3).$$

Auch diese Gleichung kann man durch Hinzufügung passender Potenzen von  $(x_1 + x_2 + x_3)$  homogen machen. Ihre Variablen sind dann die drei Functionen

$$(x_1 + x_2 + x_3), \quad (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1), \quad (x_1 x_2 x_3).$$

Die Curve besitzt im Allgemeinen den achten Grad. Daraus geht hervor, dass in der Gleichung 4) die Wurzeln mit allen möglichen Zeichencombinationen genommen werden können und dass die Gleichungen

$$+\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \lambda, \quad +\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c} = \lambda,$$

$$-\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} = \lambda, \quad -\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \lambda$$



d. h.: Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die algebraische Summe der Entfernungen von drei festen Punkten gleich Null ist, ist ein Kegelschnitt, und zwar (mit Rücksicht auf die oben gemachte Bemerkung hinsichtlich der unendlich fernen Punkte) eine Ellipse.

Ist das Dreieck gleichseitig, so geht die Ellipse durch die Ecken des Dreiecks und verwandelt sich in einen Kreis. Man erhält dann den bekannten elementaren Satz:

Verbindet man einen beliebigen Punkt der Kreislinie mit den Ecken des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, so ist die mittlere Verbindungslinie gleich der Summe der beiden anderen.

Hinsichtlich der oben gefundenen Curve achten Grades tritt uns nun sogleich eine wichtige Frage entgegen, die ich hier nur anregen will: Gibt es ausser dem Falle  $\lambda = 0$  noch Werthe der gegebenen Summenstrecke, welche, in Verbindung mit einer besondern Form des Dreiecks, eine Reduction der Curve auf einen niederen Grad oder ein Zerfallen derselben in Curven niederen Grades bewirken? — Welche Modification erleidet die Curve in dem Falle, wo die drei gegebenen Punkte auf derselben Geraden liegen? (Ohne besondere Untersuchung ist nur zu erkennen, dass in diesem letzteren Falle die Curve in Bezug auf die Gerade symmetrisch liegt.) Es wird besonders interessant sein, zu erfahren, ob und für welche Curven niederen Grades eine mit den Kegelschnitten analoge metrische Erzeugung existirt.

Da von der oben besprochenen Erzeugung offenbar alle Curven mit unendlich fernen Punkten ausgeschlossen sind, so kann man ferner die Curven untersuchen, für deren Punkte die Summe der Entfernungen von vier Punkten constant ist. Diese Curven werden offenbar unendlich ferne Punkte besitzen, da die Summe von zwei positiv unendlichen Entfernungen sich gegen diejenige zweier negativ unendlichen bis auf eine beliebige endliche Grösse aufhebt.

Es können endlich alle diese Aufgaben im Gebiete des Raumes betrachtet werden. Man erhält dann, sobald die gegebenen festen Punkte auf derselben Geraden liegen, eine Rotationsfläche und, falls sie in derselben Ebene liegen, eine Fläche, welche in Bezug auf diese Ebene symmetrisch ist.

Zum Schluss möge noch eine Construction Erwähnung finden, welche, als Erweiterung der Fadenconstruction der Ellipse, für  $n$  beliebige feste Punkte denjenigen Zweig der Curve liefert, für welchen alle Entfernungen positiv sind.

Es seien die festen Punkte durch aufrechte, auf einer Tafel befestigte *Star* die Curve erzeugende Punkt durch einen kleinen Ring dar-



seine Derivirte sein würde, wenn in ihm nur der als Constante behandelte Bestandtheil variabel wäre.

In dem speciellen Falle, wo  $f(u, x)$  von der Form  $u F(x)$  ist, wird

$$\int f(u, x) \partial x = \int u F(x) \partial x = u \int F(x) dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \int f(u, x) \partial x = \frac{\partial}{\partial u} \left( u \int F(x) dx \right) = \int F(x) dx,$$

und damit geht die Formel 4) über in

$$\int u F(x) dx = u \int F(x) dx - \int \left\{ \int F(x) dx \right\} \frac{du}{dx} dx,$$

d. h. in die Formel für die partielle Integration.

Als Beispiel für die allgemeine Formel 4) diene das Integral

$$\int x(a + bx + cx^2)^m dx.$$

Setzt man  $bx = u$  und betrachtet  $u$  vorläufig als Constante, so ist

$$\int x(a + u + cx^2)^m \partial x = \frac{(a + u + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \int x(a + u + cx^2)^m \partial x = \frac{(a + u + cx^2)^m}{2c},$$

mithin nach Nr. 4)

$$\int x(a + u + cx^2)^m dx = \frac{(a + u + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c} - \int \frac{(a + u + cx^2)^m}{2c} \cdot \frac{du}{dx} dx$$

und nach Restitution des Werthes  $u = bx$

$$\int x(a + bx + cx^2)^m dx = \frac{(a + bx + cx^2)^{m+1}}{2(m+1)c} - \frac{b}{2c} \int (a + bx + cx^2)^m dx.$$

Ueberhaupt erweist sich die Formel dann als nützlich, wenn ein Factor der zu integrierenden Function die Derivirte des andern Factors sein würde, falls gewisse Bestandtheile des letzteren (wie vorhin  $bx$ ) constant wären.

Hiernach unterliegt es auch keiner theoretischen Schwierigkeit, vorläufig mehrere Bestandtheile der Function  $f$  als Constanten zu betrachten; die allgemeine Formel dafür ist

$$\int f(u_1, u_2, \dots, u_n, x) dx$$

$$= \int f(u_1, u_2, \dots, u_n, x) \partial x - \sum_{p=1}^n \int \left\{ \frac{\partial}{\partial u_p} \int f(u_1, u_2, \dots, u_n, x) \partial x \right\} \frac{du_p}{dx} dx.$$

(Aus einem Briefe des Herrn Dr. Worpitzky in Charlottenburg.)





selbst für den Factor  $\frac{1}{2}$  auf der rechten Seite  $\frac{1}{2}$  zu setzen ist), und schreibt sich

$$U = \kappa(\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial \kappa^2} + (2\kappa - 1) \frac{\partial u}{\partial \kappa} + \frac{1}{4}u = \frac{\sigma}{4(1 - \kappa\xi)^2}.$$

Die reducirte Differentialgleichung  $U=0$  wird durch die Periodicitätsmodula  $K$  und  $K'$  oder durch  $u(1)$  und  $u(\infty)$  befriedigt, und man kann daher die Lösung der complete Differentialgleichung durch eine Quadratur nach  $\kappa$  (vergl. Baltzer, Determinanten, § 10, 4) finden. Berücksichtigen wir die bekannte Gleichung

$$K \frac{\partial K'}{\partial \kappa} - K' \frac{\partial K}{\partial \kappa} = \frac{-\pi}{4\kappa\kappa'},$$

so finden wir für  $u$  die Lösung

$$u = K' \int \frac{\sigma \cdot K \cdot d\kappa}{\pi(1 - \kappa\xi)^2} - K \int \frac{\sigma \cdot K' \cdot d\kappa}{(1 - \kappa\xi)^2},$$

in welcher die unteren Grenzen der Integrale noch zu bestimmen, aber von  $\kappa$  unabhängig sind. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 2\pi u &= \sqrt{\xi(1-\xi)} K' \int d\kappa \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\kappa\xi)^3} \sigma(\lambda)} \\ &+ i\sqrt{\xi(1-\xi)} K \int d\kappa \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(1-\kappa\xi)^3} \sigma(\lambda)}, \end{aligned}$$

und durch Vertauschung der Integrationsreihenfolgen

$$\begin{aligned} 2\pi u &= \sqrt{\xi(1-\xi)} K' \int_0^1 \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \int \frac{d\kappa}{(1-\kappa\xi) \sqrt{(1-\kappa\xi)(1-\kappa\lambda)}} \\ &+ i\sqrt{\xi(1-\xi)} K \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(1-\lambda)}} \int \frac{d\kappa}{(1-\kappa\xi) \sqrt{(1-\kappa\xi)(1-\kappa\lambda)}}. \end{aligned}$$

Die Integrationen nach  $\kappa$  lassen sich ausführen, da ja

$$\int \frac{d\kappa}{(1-\kappa\xi) \sqrt{(1-\kappa\xi)(1-\kappa\lambda)}} = \frac{1-\kappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{2}{\sqrt{(1-\kappa\xi)(1-\kappa\lambda)}} + \text{const.}$$

ist, und so folgt denn weiter, wenn  $\alpha\pi$ ,  $\alpha'\pi i$  von  $\kappa$  unabhängige Constanten sind,

$$u\pi + \alpha K\pi + \alpha' i K'\pi = \frac{\sigma \cdot K'}{1-\kappa\xi} \int_0^1 \frac{1-\kappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{i\sigma \cdot K}{1-\kappa\xi} \int_0^\infty \frac{1-\kappa\lambda}{\xi-\lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)},$$



$$\begin{aligned}
\frac{\sigma \cdot i}{1 - \kappa \xi} K \int_0^\infty \frac{1 - \kappa \lambda}{\xi - \lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} &= 2 K K' \frac{\partial}{\partial u} \lg \theta_0^1(u) + i K \lg \frac{\theta_1^1(u + i K')}{\theta_1^1(u - i K')} \\
&= 2 K K' \frac{\partial \lg}{\partial u} \theta_0^1(u) + i K \lg \left( - e^{\frac{\pi K'}{K}} \cdot e^{\frac{-(u - i K') i \pi}{K}} \right) \\
&= 2 K K' \frac{\partial \lg}{\partial u} \theta_0^1(u) + u \pi + i K \lg(-1).
\end{aligned}$$

Setzt man nun  $\lg(-1)$  im ersten Falle gleich  $\alpha' i \pi$ , im zweiten  $-\alpha i \pi$ , unter  $\alpha, \alpha'$  ungerade Zahlen verstanden, so folgt durch Addition wieder

$$u \pi + \alpha \pi K + \alpha' i \pi K' = \frac{\sigma \cdot K'}{1 - \kappa \xi} \int_0^1 \frac{1 - \kappa \lambda}{\xi - \lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)} + \frac{\sigma i K}{1 - \kappa \xi} \int_0^\infty \frac{1 - \kappa \lambda}{\xi - \lambda} \frac{d\lambda}{\sigma(\lambda)}.$$

Die ungeraden Zahlen  $\alpha, \alpha'$  sind ihrer Natur nach unbestimmt, weil  $u$  unendlich vieldeutig ist.

Freiburg i. B.

J. THOMAE.

## XXI. Einfachste Formel für das Volumen des Prismatoids.

Im XVI. Jahrgang dieser Zeitschrift, S. 534, habe ich eine Formel mitgetheilt zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Polygons, wenn die Seiten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und deren Winkel  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  mit einer beliebigen Richtung gegeben sind. Dieselbe heisst

$$1) \quad f = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n-1} a_i^2 \sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n-2} \left( a_i \sin \alpha_i \sum_{k=i+1}^{k=n-1} a_k \cos \alpha_k \right) - \frac{1}{4} a_n^2 \sin 2\alpha_n.$$

Diese Formel giebt ein Mittel an die Hand zur directen Volumenberechnung der Körper, die zuerst Steiner und später unabhängig von ihm und auf anderem Wege Wittstein berechnen lehrten, und die von Letzterem den Namen Prismatoid erhalten haben, unter welchem Namen sie jetzt in allen neueren Lehrbüchern der Stereometrie betrachtet werden. Ich kann also die Kenntniss der wichtigsten Eigenschaften dieser Polyeder voraussetzen. Legt man parallel zu den beiden Grundflächen des Prismatoids eine Durchschnittsebene, so schneidet dieselbe die Oberfläche des Prismatoids in einem Polygon, dessen Seiten der Reihe nach den Seiten der beiden Grundflächen (beziehungsweise den Grundkanten) parallel sind und ihrer Länge nach sich als lineare Functionen einerseits dieser Seiten, andererseits des Abstandes der Durchschnittsebene von einer der Grundflächen erweisen. Seien nun  $G$  und  $g$  die beiden Grundflächen,  $x$  der Abstand des Durchschnittes  $\Delta$  von  $G$ , so ergiebt sich  $\Delta$  bei Anwendung der Formel 1) als eine ganze Function zweiten Grades von  $x$ .

Setzen wir  $\Delta = ax^2 + bx + c$ , so lassen sich  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und mithin auch  $\Delta$  für alle Werthe von  $x$  bestimmen, wenn der Werth von  $\Delta$  für drei Werthe von  $x$  bekannt ist.

Wählt man mit Steiner und Wittstein als Grundlage zu diesen Berechnungen die beiden Grundflächen  $G$  und  $g$  und den sogenannten mittleren Durchschnitt  $D$ , so hat man, wenn die Höhe  $= h$  gesetzt wird, zur Bestimmung von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die drei Gleichungen

$$c = G, \quad ah^2 + bh + c = g, \quad \frac{1}{3}ah^2 + \frac{1}{2}bh + c = D.$$

Man erhält also

$$a = \frac{2(G+g) - 4D}{h^2}, \quad b = \frac{4D - 3G - g}{h}, \quad c = G.$$

Mit Hilfe der Integralrechnung oder auch auf elementarem Wege\* findet man für das Volumen  $V$  des Prismatoids die Formel

$$2) \quad V = \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{2}bh^2 + ch$$

und, wenn man hierin für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die obigen Werthe setzt, die bekannte Steiner-Wittstein'sche Formel

$$V = \frac{h}{3} \left( 2D + \frac{G+g}{2} \right).$$

Es liegt nun die Frage nicht sehr fern, ob nicht durch passende Wahl des ausser den beiden Grundflächen zu messenden Querschnittes das Messen beider Grundflächen auf das von einer derselben reducirt werden könne, ohne dass dadurch eine complicirtere Formel für  $V$  erhalten werde. Setzen wir, um diese Frage zu beantworten, voraus, man kenne den Durchschnitt  $\Delta$  in  $\frac{1}{n}$  der Höhe über  $G$ , so haben wir zur

Bestimmung von  $a$  und  $b$  die beiden Gleichungen

$$ah^2 + bh + G = g, \quad a\frac{h^2}{n^2} + b\frac{h}{n} + G = \Delta.$$

Man erhält

$$a = \frac{ng + n(n-1)G - n^2\Delta}{(n-1)h^2}, \quad b = \frac{n^2\Delta - (n^2-1)G - g}{(n-1)h}$$

und

$$4) \quad V = \frac{h}{6(n-1)} [(2n-3)g - (n-1)(n-3)G + n^2\Delta].$$

Für  $n=3$  folgt hieraus

$$5) \quad V = \frac{h}{4} (g + 3\Delta)$$

und für  $n=1\frac{1}{2}$ , also für  $x = \frac{2}{3}h$ , erhält man

\* Siehe § 88 in dem unter der Presse befindlichen zweiten Theile meines Lehrbuches der Theil kürzlich bei Weidmann in Berlin erschienen

$$6) \quad V = \frac{h}{4} (G + 3\Delta),$$

zwei sehr einfache Formeln, welche beide den Satz ausdrücken:

Der Inhalt eines Prismatoids ist gleich einem Prisma von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich ist einem Viertel der Summe aus der einen Grundfläche und dem dreifachen ihr parallelen Durchschnitte, welcher ihren Abstand von der andern Grundfläche im Verhältnisse von 2:1 theilt.

Reducirt sich insbesondere die eine Grundfläche  $g$  auf eine Kante, so genügt zur Berechnung des Volumens die Ausmessung des Durchschnittes  $\Delta$  in  $\frac{1}{3}$  der Höhe und man hat

$$V = \frac{3}{4} h \Delta.$$

Wertheim a. M., im Mai 1877.

JOHANN KARL BECKER,  
Gymnasialprofessor.

## XXII. Geometrische Untersuchungen.

### I.

Aus der bekannten Formel für den Halbmesser des um ein Dreieck beschriebenen Kreises  $r = abc : 4\Delta$  folgt durch Projection die andere

$$1) \quad E = \pi \cdot \frac{r_{12} r_{23} r_{31}}{r},$$

nach welcher Formel der Flächeninhalt  $E$  einer Ellipse aus dem Umkreisradius eines ihr eingeschriebenen Dreiecks und den zu dessen Seiten parallelen Halbmessern der Ellipse gefunden werden kann. Fallen die drei Punkte zusammen, so wird  $r_{12} = r_{23} = r_{31} = r'$ ,  $r$  wird der Krümmungsradius an dieser Stelle und es kommt  $r = r'^3 : ab$ , ein bekannter Ausdruck.

Die Formel 1) kann noch anderweitig benützt werden. Sind vier Punkte  $A_1, A_2, A_3, A_4$  der Ellipse deren Schnittpunkte mit einem Kreise vom Radius  $r$ , so gelten weiter die Gleichungen

$$2) \quad E = \pi r_{23} r_{34} r_{42} : r,$$

$$3) \quad E = \pi r_{34} r_{41} r_{13} : r,$$

$$4) \quad E = \pi r_{41} r_{12} r_{24} : r.$$

Die Multiplication von 1) mit 2) und 3) mit 4) und die nachherige Division der zwei Producte liefern  $r_{23}^2 = r_{41}^2$ . Nun können zwei (verschieden gerichtete) Ellipsenhalbmesser nur dann gleich sein, wenn ihre Richtungen zu den Axenrichtungen der Ellipse symmetrisch sind. Also folgt: Bilden vier Punkte einer Ellipse ein Kreisviereck, so sind je zwei gegenüberliegende Seiten desselben gegen die Axen der Ellipse gleich geneigt. [Dieser Satz (ohne Beweis) rührt bekanntlich von Jacob Steiner her.]

Lassen wir nun drei dieser Punkte,  $A_1, A_2, A_3$ , in  $A$  zusammenfallen, so wird der vierte Punkt  $A_4$  der Schnittpunkt  $B$  des in  $A$  die





**Historisch-literarische Abtheilung**  
der  
**Zeitschrift für Mathematik und Physik**

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

**Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl**

und

**Dr. M. Cantor.**



**XXIII. Jahrgang.**

---

**LEIPZIG,**  
Verlag von B. G. Teubner.  
1878.



**Druck von B. G. Teubner in Dresden.**





Synthetische und analytische Geometrie. Seite

**Reye, Th.,** Die Geometrie der Lage. Von **Milinowski** . . . . . 22

**Klein, B.,** Ueber die geradlinige Fläche dritter Ordnung. Von **Milinowski** . . 93

**Jenny, Aug.,** Das Ellipsoid. Von **Th. Hugel** . . . . . 99

**Rudel, K.,** Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie.  
Von **Milinowski**. . . . . 132

**Lieber & v. Lühmann,** Trigonometrie und Stereometrie. Von **Th. Hugel** . . 135

**Tessari, La teoria delle ombre e del chiaroscuro.** Von **Chr. Wiener** . . . . 180

**Brill & Klein,** Mathematische Modelle. Von **M. Noether** . . . . . 183

**Malthe-Bruun & Orone, Quatre modèles.** Von **M. Noether** . . . . . 185

**Rottok, H. L.,** Neuere Geometrie. Von **L. Matthiessen**. . . . . 185

**Wohlgemuth,** Lehrbuch der Geometrie. Von **Th. Hugel** . . . . . 187

**Vogler, Ch. Aug.,** Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln. Von **M. Cantor** 189

Geodäsie.

**Jordan, W.,** Handbuch der Vermessungskunde. Von **A. Fuhrmann** . . . . . 2

**Hartner, Fr.,** Handbuch der niederen Geodäsie, bearbeitet von **Jos. Wastler**.  
Von **C. Bohn** . . . . . 6

**Neumeyer, L.,** Hilfstafeln für barometrische Höhenmessungen. Von **C. Bohn** . 9

Mechanik, Physik, Telegraphie.

**Matthiessen, L.,** Grundriss der Dioptrik geschichteter Linsen. Von **F. Lippich** . 59

**Bohn, C.,** Ergebnisse physikalischer Forschung, I. Von **P. Zech** . . . . . 98

**Zetzsche, K. E.,** Handbuch der elektrischen Telegraphie, I. Von **A. Tobler** . 124

**Ferraris, G., Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici.** Von **F. Lippich** . 128

**Ortmann, O.,** Die Statik der Gewölbe. Von **Weyrauch** . . . . . 131

**Neumann, C.,** Ueber das logarithmische und Newton'sche Potential. Von **F. Grube** 141

**Koppe, K.,** Anfangsgründe der Physik, bearbeitet von **W. Dahl**. Von **G. Recknagel** 159

**Weidenbach,** Compendium der elektrischen Telegraphie. Von **Ed. Zetzsche** . . 188

Bibliographie . . . . . Seite 34, 66, 100, 137, 166, 192

Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1877 . . . . . 102

„ „ 1. Juli bis 31. December 1877 . . . . . 196

# Historisch-literarische Abtheilung.

## Der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler.

Von  
MORITZ CANTOR.

Als Paul Heinrich von Fuss im Jahre 1843 im Auftrage der Petersburger Akademie die beiden stattlichen Bände herausgab, welche unter dem Titel *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle* historisch unschätzbare Briefe von Euler, von Goldbach, von verschiedenen Mitgliedern der Gelehrtenfamilie Bernoulli u. s. w. enthalten, da stellte er auf Seite XXXV der Vorrede die mögliche Erscheinung auch noch eines dritten Bandes in Aussicht. Zu diesem Zwecke hoffe er durch Vermittelung von C. G. J. Jacobi, der für diese Veröffentlichung — er hätte sagen können: für Alles, was auf die Geschichte der Mathematik sich bezog — das lebhafteste Interesse an den Tag legte, in Besitz einer ganzen Sammlung von Briefen Euler's an Lagrange zu gelangen, damals das Eigenthum des unermüdlichen, in seinen Mitteln nicht sehr wählerischen Sammlers Libri. Jener 3. Band ist bekanntlich nicht erschienen. Dafür kamen 1862 die *Opera postuma* Euler's heraus nach 1844 in unerwarteter Weise entdeckten Manuscripten. Wieder war es Paul Heinrich von Fuss, dem die Petersburger Akademie den Auftrag ertheilt hatte, den Druck zu überwachen, und nach dessen 1855 erfolgtem Tode trat Nicolaus von Fuss in die Stelle des Bruders. Im 1. Bande der *Opera postuma* S. 555—588 befinden sich 18 Briefe Euler's an Lagrange aus den Jahren 1755—1775, welche der Herausgeber, wie es in der Vorrede S. V heisst, zu anderem Zwecke gesammelt hatte. Jenes vorerwähnte Libri'sche Exemplar war dazu allerdings nicht benutzt worden. Dasselbe ging nämlich am 17. Januar 1876 in den Besitz des Fürsten Boncompagni in Rom über, dessen freundlichen Mittheilungen wir die Thatsache entnehmen, dass die Libri'schen Briefe keineswegs die Originale, sondern nur Abschriften seien, während dem Abdruck Originalien selbst zu Grunde gelegen haben.

geber der *Opera postuma* beigefügte Anmerkungen, von denen gleich noch die Rede sein wird. Wie und wann zwischen 1843 und 1862 die Originalbriefe nach Petersburg kamen, wohin sie dann gelangten, ist zweifelhaft. Am Wahrscheinlichsten dürften sie sich unter dem Nachlasse Lagrange's befinden, welcher Eigenthum der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften zu Paris ist und nunmehr zur Besorgung der Gesamtausgabe von Lagrange's Werken unter der Leitung von Herrn J. A. Serret dient.

Waren indessen die Briefe Euler's an Lagrange für das mathematische Publikum seit 1862 im Abdrucke vorhanden, so verhielt es sich ganz anders mit den Briefen Lagrange's an Euler. Sie schienen verloren, bis Professor Somof (der Wissenschaft am 8. Mai 1876 entrissen) Ende 1872 wenigstens einen Theil derselben in dem Archive des Conferenzsaales der Petersburger Akademie entdeckte. Vier Briefe gehörten einem Convolute an, welches die Aufschrift trägt: L. Euler's Briefwechsel 1749 bis 1755, sieben Briefe einem zweiten Convolute mit der Aufschrift: L. Euler's Briefwechsel 1756 bis 1766. Sie gehören also sämmtlich der Zeit an, zu welcher Euler sich in Berlin, Lagrange in Turin aufhielt, und entsprechen den zehn aus Berlin datirten Briefen Euler's in den *Opera postuma* I S. 555—568, welche in einer Note zu S. 556 als von Euler eigenhändig geschrieben bezeichnet werden. Die acht aus Petersburg datirten Briefe (*Opera postumum* I S. 568—588) sind dagegen, einer zweiten auf S. 568 befindlichen Anmerkung zufolge, von der Hand derjenigen Schüler Euler's, die seit seiner Augenkrankheit ihm Secretärsdienste zu leisten pflegten, Joh. Albert Euler, J. A. Lexell, W. L. Krafft und Nicolaus Fuss.\* Die Briefe Lagrange's an Euler aus diesem zweiten Zeitraume sind noch nicht wieder aufgefunden worden. Ob Spuren von ihnen in Paris nachweisbar sind, ist bei der fast übergrossen Geheimthuerei des dortigen Herausgebers für's Erste nicht zu ermitteln. Nachdem Fürst Boncompagni von dem Dasein der genannten elf Briefe durch eine Mittheilung von Prof. Somof von Ende November 1872 Kunde erhalten hatte, beschloss er, die Veröffentlichung derselben sich angelegen sein zu lassen, und so haben wir jetzt deren photolithographische Wiedergabe vor uns unter dem Titel: *Lettres inédites de Joseph Louis Lagrange à Leonard Euler tirées des archives de la salle des conférences de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg et publiées par B. Boncompagni. Saint-Petersbourg MDCCCLXXVII.* Ein ziemlich ausführlicher Bericht über diese nach Form und Inhalt gleich hervorragende

\* Diese beiden Anmerkungen, auf die vorher zum Beweise, dass der Abdruck in den *Opera postuma* auf den Originalbriefen beruhe, abgehoben wurde, finden sich nämlich nicht auch in der Libri'schen Abschrift, aus der die Briefe folglich nicht entnommen sein können, wie Fürst Boncompagni uns auf Anfrage freundlich



halt hinter sich, war seit 1744 Director der mathematischen Classe der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, in welcher Stellung er bis 1766 verblieb, worauf Lagrange sein Nachfolger wurde. Ausser zahlreichen Abhandlungen hatte er schon seine *Mechanik* (1736—1742), seine *Einführung in die Analysis des Unendlichen* (1748), seine *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1741), sämmtlich in lateinischer Sprache, durch den Druck bekannt gemacht.

Auf der einen Seite sehen wir also einen hochberühmten Gelehrten in der vollen Kraft seiner von Europa bewunderten Leistungen, auf der andern Seite einen unbekannten Anfänger, dessen Lebensjahre ihn fast noch zum Knaben stempeln würden, wenn die Reife seiner Gedanken ihn nicht als Mann bezeichnete.

1. Am 28. Juni 1754 richtete Lagrange seinen ersten Brief an Euler. Die Jahreszahl ist zwar nicht beigelegt, aber unzweifelhaft hat Herr Genocchi mit Recht angenommen, sie könne nur 1754 gewesen sein. An 1753 etwa zu denken, verbietet neben einem noch zu erwähnenden Umstande das damals allzujugendliche Alter des Briefstellers, und 1755 ist aus anderen Gründen unmöglich. Der bekannte Brief an Fagnano nämlich, welcher, durch den Druck vervielfältigt, die erste Veröffentlichung von Lagrange und zugleich seine einzige Veröffentlichung in italienischer Sprache bildet, rührt vom 23. Juli 1754 her, und der Brief an Euler, der Hauptsache nach mit jenem übereinstimmend, wäre gewiss nicht geschrieben worden, wenn Lagrange statt seiner ein gedrucktes Exemplar hätte überreichen können, ganz abgesehen davon, dass Lagrange noch 1754 erfuhr, seine vermeintliche Entdeckung sei nicht neu, dass er darüber die weitere Beschäftigung mit mathematischen Gegenständen fast verschwor und somit sicherlich nicht ein halbes Jahr später noch darüber schreiben mochte, wie er es in dem Briefe an Euler gethan hat. Es handelt sich um die Vergleichung der beiden Formeln, welche den  $n^{\text{ten}}$  Differentialquotienten des Productes  $u \cdot v$  und die  $n^{\text{te}}$  Potenz der Summe  $u + v$  darstellen, um den Nachweis der Identität der dabei auftretenden Coefficienten, um die Bemerkung, dass die Vertauschung von  $n$  mit  $-n$  die Differentiation in eine Integration übergehen lasse. Gelegentlich des speciellen Falles, der in der Reihe

$$\int y \, dx = x \cdot y - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots$$

sich kundgiebt, fragt Lagrange, ob das nicht die Reihe sei, welche schon längst Leibnitz angegeben habe? Auch in dem gedruckten Briefe an Fagnano stellt Lagrange eine auf diese Reihe bezügliche Frage, nur heisst sie dort, und mit Recht, ob die Reihe nicht die des Johann Bernoulli sei, welcher sie im Novemberhefte 1694 der *Acta Eruditorum* veröffentlicht habe? Die besondere Reihe ist in der That Eigenthum von Johann Bernoulli und an dem genannten Orte zuerst mitgetheilt.





gemacht haben werde. Diese Stelle war schon F. Giesel in seinem Torgauer Programm von 1857: „Geschichte der Variationsrechnung, I. Thl.“ nicht entgangen. Unter Anmerkung 98 ist sie abgedruckt. Heute besitzen wir nun die Briefe selbst, in welchen Lagrange dem Verfasser der *Methodus inveniendi etc.* die später so wichtig gewordene Erfindung des Zeichens  $\delta$  zur Unterscheidung der Variationen von gewöhnlichen Differentiationen und die Anwendung desselben mittheilt. Der Brief vom 12. August 1755 insbesondere liest sich wie ein Excerpt aus der Abhandlung von 1762, wenn wir nicht wüssten, dass er derselben um 7 Jahre vorhergeht. Die drei allgemeinen Fälle  $\int Z$  (so schreibt Lagrange auch noch in den *Leçons sur le calcul des fonctions* von 1806 S. 437 und häufiger, ohne dass ein Differential angegeben wäre, nach welchem integriert werden soll) zu einem Maximum oder Minimum zu machen, je nachdem  $Z$  nur die Veränderlichen  $x, y$  und die Ableitungen von  $y$ , oder ausserdem noch eine Integralfunction  $\Pi$  von einem andern, in Bezug auf seine letzten Bestandtheile dem  $Z$  ähnlich zusammengesetzten ( $Z$ ) enthalten soll, worauf  $\delta(Z)$  entweder von  $\delta\Pi$  frei sein oder dasselbe enthalten kann, werden wie in dem *Essai d'une nouvelle méthode* unterschieden und unter Anwendung fast der gleichen Buchstaben in allgemeiner Weise behandelt. Im Aufsätze steht nur  $Z'$ , wo im Briefe ( $Z$ ) geschrieben ist. Besondere Beispiele, sagt Lagrange, könne er lösen, aber er geht für's Erste nicht darauf ein. Euler antwortete unter dem 6. September 1755 und äusserte die entschiedenste Anerkennung der neuen Methode, in welcher er einen bedeutenden Fortschritt gegenüber von seinen eigenen Forschungen erkenne. Bemerkenswerth ist etwa, dass Euler das  $\int Z$  statt  $\int Z dx$  ausdrücklich hervorhebt, um es dadurch zu erläutern, dass er beifügt, Lagrange betrachte eben  $dx$  als Einheit.

3. Euler's Antwort traf zu einer für Lagrange ereignissvollen Zeit ein. Der erst 19½ Jahre alte Gelehrte war zum Professor an der Artillerieschule zu Turin ernannt worden. Die unentbehrlichsten Vorbereitungen für den ihm übertragenen Unterricht verzögerten seine Erwiderung etwa 5 Wochen lang, bis er dann am 20. November 1755 die Musse fand, Euler neue Fortschritte der Variationsrechnung mitzutheilen, insbesondere ihm auseinanderzusetzen, wie weit die Aufgabe der Brachistochrone in seinen Händen sich entwickelt hatte. Euler hatte bei seinen Arbeiten über dieses Problem, welches bereits geschichtliche Wichtigkeit besass, gleich seinen Vorgängern nur den Fall betrachtet, dass ein materieller Punkt unter dem Einflusse der Schwere in kürzestmöglicher Zeit von einem Punkte  $A$  nach einem andern Punkte  $B$  gelangen sollte. Lagrange liess dagegen den materiellen Punkt von  $A$  aus nach irgend einem Punkte einer gegebenen Curve  $\Phi$  fallen und fand



in einem Briefe vom 19. Mai 1756 bemerkte er mit Euler's Erläuterung der verschiedenen Umformungen der betreffenden Differentialgleichungen sich durchaus einverstanden und in zur Veröffentlichung bestimmten Arbeiten über Variationsrechnung kam er auf den Gegenstand niemals zurück. Sein Irrthum beruhte nämlich darauf, dass er aus der Gleichung  $L=0$ , welche die Differentialgleichung der die Eigenschaften eines Grössten oder Kleinsten besitzenden Curve darstellt, durch weitere Differentiationen, welche bei Gelegenheit factorenweiser Integrationen eintreten, die an sich berechtigten und zur Einführung von Bedingungen auch heute dienenden Folgerungen  $\partial L=0$ ,  $\partial^2 L=0$  u. s. w. zog, dann aber ohne Weiteres die Integration von  $\partial L=0$ , beziehungsweise von  $\partial^2 L=0$  vornahm, wodurch Glieder neu hinzukommen, welche der eigentlichen Aufgabe nicht angehören, und das hatte ihm Euler in seiner Antwort bemerklich gemacht.

4. Ein weiterer Brief Lagrange's muss etwa im Monat März 1756 geschrieben worden sein, der jedoch in der Sammlung fehlt. Euler beginnt wenigstens das Antwortsschreiben vom 24. April mit der Empfangsanzeige zweier Briefe, deren erster, „am Ende des verflossenen Jahres“ eingetroffen, mit dem Briefe vom 20. November 1755 sicherlich identisch ist, während der zweite, „neuerdings“ geschriebene offenbar als uns heute fehlend bezeichnet werden muss. Ueber den Inhalt desselben ist aus Euler's Antwort ebenso wenig, wie aus Lagrange's späteren Briefen irgend eine Andeutung zu entnehmen. Euler zeigte die erhaltenen Briefe dem Präsidenten der Berliner Akademie, Maupertuis, der bekanntlich von Friedrich dem Grossen eigens zu diesem Amte nach Berlin berufen, demselben bis zu seinem 1759 erfolgenden Tode vorstand; auch nachdem er Berlin wieder verlassen hatte. Nach dem Tode von Maupertuis blieb die Stelle nach erfolglosen Unterhandlungen mit D'Alembert unbesetzt, d. h. der König behielt sich das Ernennungsrecht der Mitglieder und die Oberleitung der Akademie von nun an selbstständig vor. Im Frühjahr 1756 dagegen war die Machtvollkommenheit des Präsidenten der Akademie eine ziemlich unumschränkte, auch über den unmittelbaren Kreis seiner Befugnisse hinaus. Das Urtheil über Maupertuis hat im Laufe der Jahre sehr gewechselt. Während er selbst seinen Ruhm über die Maassen ausposaunte und gläubige Zuhörer fand, ging Lalande in dem von ihm bearbeiteten IV. Bande des Montucla'schen Geschichtswerkes so weit, die Erzählung von der lappländischen, unter der Leitung von Maupertuis ausgeführten Gradmessung mit den Worten einzuleiten: „Maupertuis wusste den Angenehmen zu machen, Liedchen zu verfertigen, Guitarre zu spielen, und das verhalf ihm zu dem von ihm gewünschten Auftrage.“ Die Wahrheit dürfte in der Mitte liegen. Ein Mann, für welchen Euler und Lagrange bei jeder Gelegenheit die *höchste Achtung an den Tag* legten, während der Erstere wenigstens



*Mécanique analytique* zu erkennen, welche in erster Ausgabe 1788 erschien. Ob Spuren jenes ersten Entwurfes selbst sich irgendwo nachweisen lassen, ist bis jetzt nicht bekannt. Eines wissenschaftlichen Inhaltes entbehrt der Brief vom 19. Mai auch nicht gänzlich. Euler hatte nämlich am 24. April ein interessantes Problem angeregt. Wenn ein schwerer Punkt, der auf derselben Horizontallinie mit dem Anfangspunkte einer Vertikalen liegt, sich durch eine Vierteilellipse nach jener Vertikalen hinzubewegen genöthigt ist, deren halbe grosse Axe die Entfernung der genannten beiden Punkte darstellt, während die halbe kleine Axe auf der Vertikalen selbst abgeschnitten ist, wie gross ist ebendiese halbe kleine Axe zu wählen, damit die Bewegungszeit des fallenden Punktes ein Minimum werde. Euler selbst gab als durch Annäherung gefundenen Werth  $b = \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ , fragte aber zugleich nach der Möglichkeit einer directen Auflösung. Lagrange stellt nun die Möglichkeit einer anderen als näherungsweise verfahrenen Auflösung in Abrede, weil die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Grössen  $a$  und  $b$  durch ein Integral vermittelt sei, dessen Auswerthung nur in Reihenform möglich sei. Er bezieht sich dabei auf Euler's Abhandlung im 7. Bande der Petersburger Akademie, womit offenbar die Abhandlung gemeint ist: *De infinitis curvis ejusdem generis sive methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis* (Comment. Acad. Petrop. VII, 1740). Lagrange behielt sich vor, auf den Gegenstand zurückzukommen, was aber nicht geschehen zu sein scheint. Inzwischen war Maupertuis von Berlin abgereist und hielt sich in St. Malo in der Bretagne auf. Mit ihm musste Euler sich wegen des geschäftlichen Theiles des Briefes in schriftliche Verbindung setzen und so dauerte es bis zum 2. September 1756, bevor er Lagrange in einem Billet anzeigen konnte, dass er an demselben Tage zum auswärtigen Mitgliede der Berliner Akademie unter allgemeiner Zustimmung ernannt worden sei und gleichzeitig mit dieser Mittheilung auch das betreffende Diplom erhalten werde; die Adresse von Maupertuis wird zugleich beigelegt mit der Aufforderung, diesem ihm so wohlwollenden Manne einen Dankbrief zu schreiben.

6. Die Ernennung Lagrange's zum auswärtigen Akademiker war bereits in die beginnenden Wirren des siebenjährigen Krieges gefallen, da schon im August der Einmarsch der Truppen König Friedrich's in Sachsen, am 10. September die Einnahme von Dresden erfolgte. Es ist kaum zweifelhaft, dass in diesem Kriegsausbruche der Grund zu suchen ist, weshalb die zweite Hälfte des Planes, den Maupertuis zu Gunsten Lagrange's gefasst hatte, die persönliche Anstellung in Preussen, damals unerfüllt blieb und erst 1766 sich verwirklichte, als Euler zum zweiten Male nach Petersburg übersiedelte und Lagrange statt seiner zum Director der mathematischen Classe der Berliner Akademie mit dem für jene Zeit sehr hohen Jahresgehälter von Thlr. 1500 ernannt wurde.



zengleichungen und Differentialgleichungen nachgewiesen. Der dritte Aufsatz, auf welchen allein Lagrange Euler mit einer gewissen Selbstbefriedigung hinweist, enthält die berühmten *Recherches sur la nature et la propagation du son*, die in dem zweiten und dritten Bande der Turiner Abhandlungen fortgesetzt wichtige Beiträge zur damals noch ganz neuen Lehre von den periodischen Reihen bildeten.\* Ausser auf diese Untersuchungen, deren Bedeutung für Euler schon darin liegen musste, dass hier von einem ganz andern Gesichtspunkte aus, als er selbst zum Ausgange gewählt hatte, fast die gleichen Ergebnisse gewonnen und dem gemeinsamen wissenschaftlichen Gegner D'Alembert frische Einwürfe entgegengehalten wurden, machte Lagrange seinen Correspondenten auch auf die Arbeit eines zu den schönsten Hoffnungen berechtigenden Schülers der Artillerieschule aufmerksam, auf die *Reflexions sur les quantités imaginaires* von Daviet de Foncenex. Wohl durfte er das, denn auch hier war mit unbestreitbarem Talent Neues entwickelt, auch hier begegnete Euler auf jeder Seite sein eigener Name, begegneten ihm Angriffe gegen D'Alembert, freilich in höflichster Form, aber immerhin Angriffe, offenbar der Mehrzahl nach von Lagrange beeinflusst, in einem Falle, wo es sich um ein bei der Anziehung einer sphärischen Oberfläche auf einen Punkt auftretendes Paradoxon handelte, sogar von Lagrange unterschrieben, welcher diese Polemik als Anmerkung zu dem Aufsätze seines Schülers führte. So lässt sich dem ersten Bande der Turiner Abhandlungen als Gesammturtheil das Lob ertheilen, Neues und Wichtiges in überraschender Menge veröffentlicht zu haben, wenn man zugleich den leisen Tadel hinzufügt, es sei mit einer gewissen Vorliebe auf Streitpunkte eingegangen, auch wo eine Nothwendigkeit dazu nicht vorlag, und eine Verehrung Euler's trete neben einer Abneigung gegen D'Alembert nur um so schärfer hervor. Endlich fragt Lagrange in dem Briefe vom 28. Juli 1759 nach dem gegenwärtigen Aufenthalt von Maupertuis. Er konnte noch nicht ahnen, dass dieser gerade einen Tag vorher, am 27. Juli, in Basel gestorben war, und beabsichtigte, ihm und Euler, beziehungsweise der Berliner Akademie, eine grössere Arbeit handschriftlich vorzulegen, welche die Variationsrechnung und deren Anwendung auf Mechanik, letztere Wissenschaft vollständig aus dem Princip der kleinsten Action entwickelt, zum Gegenstande haben sollte. Vielleicht könne, so meint er, die Schrift in Berlin erscheinen, was vielen Druckschwierigkeiten vorbeugen würde; doch behält er sich vor, über diesen Gegenstand nochmals zu schreiben, möglicherweise bevor noch dieser Brief angekommen sein werde.

---

\* Vergl. über die Stellung dieser Aufsätze von Lagrange zu denen von Taylor, D'Alembert, Euler, Dan. Bernoulli die Habilitationsschrift Riemann's: Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Riemann's gesammelte Werke S. 218—218.





Euler's Antwort auf dem Umwege über Genf, wo der Postdirector Durade die weitere Vermittelung an den Turiner Postdirector, dieser an Lagrange übernehmen werde. Offenbar war dieses der von Schwierigkeiten nicht freie Weg, von welchem im Briefe vom 28. Juli die Rede war. Die Briefe kamen an, und die Antwort Euler's trägt das Datum des 2. October, den Empfang des Buches dagegen war er erst am 27. October in der Lage, anzeigen zu können. Wir übersetzen einige Stellen aus dem Briefe vom 2. October, welche geeignet sind, auf das früher angedeutete persönliche Verhältniss Euler's zu Maupertuis und D'Alembert einiges Licht zu werfen. „Ihr Brief kam nach dem Tode unsers würdigen Präsidenten in meine Hände. Ich bin durch diesen Unfall um so schwerer betroffen, als ich den besten Gönner, den süssesten Freund verliere ... Das Gerücht geht, die Stelle des Präsidenten mit sehr hohem Gehalte sei für D'Alembert bestimmt; ob es in diesem Falle für Sie gerathen ist, Ihr Werk hierher zu schicken, mögen Sie selbst beurtheilen ... Ich freue mich, dass Sie meiner Lösung der schwingenden Saite beipflichten, welche D'Alembert durch verschiedene Nörgeleien zu entkräften versucht hat, und zwar aus dem einzigen Grunde, weil sie nicht von ihm herrührt.“ Alsdann wendet Euler sich zu Lagrange's Andeutungen bezüglich des isoperimetrischen Problems. Er freue sich, durch Lagrange's Bemühungen den Gegenstand jetzt zum Gipfel der Vollkommenheit gebracht zu sehen. Er habe selbst, von Lagrange's Bemerkungen Hilfe empfangend, jetzt eine analytische Lösung niedergeschrieben, welche er aber zurückzuhalten beschlossen habe, bis Lagrange's Untersuchungen der Oeffentlichkeit übergeben seien, um ihm Nichts von dem ihm gebührenden Ruhme zu entziehen. Das sind die ermunternden Worte Euler's vom 2. October 1759, auf welche Lagrange (wie wir unter 2 gesehen haben) im Jahre 1769 zurückkam und von welchen auch unter October 1762 die Rede sein wird. Der Brief schliesst mit der Mittheilung, Euler habe inmitten schwerer Kriegszeiten mit dem Beginn der Ausarbeitung seiner der Petersburger Akademie längst zugesagten Integralrechnung sich beschäftigt. Es handle sich in ihr um die Auffindung von Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen aus ihren Differentialquotienten. Für Functionen von mehr als einer Veränderlichen sei fast Alles neu zu schaffen, und er glaube das Fundament dazu schon gelegt zu haben, ein Ausspruch, welcher geschichtlich bedeutsam sein dürfte als erste Aeusserung des Bewusstseins von der grossen Schwierigkeit, aber auch von der grossen methodischen Tragweite der allgemeinen Aufgabe, partielle Differentialgleichungen zu integrieren, während bisher zwischen Euler und D'Alembert vornehmlich nur ganz besondere derartige Gleichungen in Frage gekommen waren. In den nächsten Wochen nach dem 2. October erhielt, wie schon bemerkt, Euler den Band der Turiner Abhandlungen, den er rasch genug



erfahren habe, und stellt für die Mitte des folgenden Jahres einen weiteren Band in Aussicht, der allerdings erst erheblich später, nämlich 1762, die Presse verliess. Euler hatte am 2. October den Wunsch ausgesprochen, dass die freie Vereinigung Turiner Gelehrter sich bald staatlicher Unterstützung erfreuen möge; dieser Wunsch werde, meint Lagrange, am Ersten in Erfüllung gehen, wenn auswärtige Gelehrte ersten Ranges sich der noch jungen Gesellschaft gewogen zeigen. So habe Haller ihnen Beiträge zugesagt, und mit dem gleichen Anliegen wendet sich Lagrange nunmehr an Euler. Bezüglich der Nothwendigkeit, die Schalltheorie im Raume zu erörtern, ist Lagrange mit Euler einverstanden. Von diesem allgemeineren Standpunkte aus werde sich auch wohl die Abnahme des Schalles erklären lassen, die bei hlos linearer Ausdehnung nicht an und für sich eintrete; ob übrigens die Abnahme des Schalles in der That, wie man allgemein annehme, im quadratischen Verhältnisse der Entfernung stattfinde, erscheint Lagrange zweifelhaft. Auf den Druck seiner Arbeiten über Variationsrechnung und Mechanik kommt Lagrange jetzt nach Maupertuis' Tode mit keinem Worte zurück, nur über deren Inhalt sagt er für einen nächsten Brief weitere Aufschlüsse zu und bemerkt am Ende, er habe für seine Schüler Elemente einer Mechanik und einer Differential- und Integralrechnung verfasst. Von der ersteren Schrift war unter 5 die Rede, die letztere ist wenigstens einem Theile nach erhalten, wie Fürst Boncompagni im VI. Bande seines Bulletino S. 150 (Jahrg. 1873) nachgewiesen hat. Die Bibliothek des Herzogs von Genua in Turin enthält nämlich eine Handschrift mit dem Titel: *Principj di Analisi Sublime dettati da La Grange alle Reggie Scuole di Artiglieria. Parte prima. Della teoria Algebraica delle Curve.*

9. Schon am 26. December 1759 liess Lagrange einen weiteren Brief nachfolgen, der durchaus der Schalltheorie gewidmet war. Die Untersuchung einer Fortpflanzung der Schallwelle in einem Elementarkegel, dessen Spitze in dem Erschütterungspunkte liegt, war einer der neuen von Lagrange eingeschlagenen Wege, und diesen Fall hatte er soweit erörtert, dass bei ihm die im Briefe vom 24. November noch angezweifelte Abschwächung im quadratischen Verhältnisse der Entfernungen sich nachweisen liess, ein Gegenstand, der Lagrange übrigens durchaus nicht ganz klar war, wie wir gleich noch zu bemerken Gelegenheit haben werden. Mit Hilfe dieser Elementarkegel setzte er sich Kugeln zusammen, um die Fortpflanzung des Schalles unter der Annahme zu studiren, dass die Wellen als Kugelschalen weiter gehen, wobei die Differential-

gleichung  $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial \left( \frac{r}{z} \right)}{\partial z}$  auftrat. Dann verallgemeinerte er noch

diese Differentialgleichung zu der folgenden:  $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + m c \frac{\partial \left( \frac{r}{z} \right)}{\partial z},$



Folgerungen gefangen, mit welchen auch ein jüngst empfangener Brief von Daniel Bernoulli in Einklang stehe, und erklärt seine frühere anderweitige Behauptung durch einen bei der Integration eingeschlichenen Rechenfehler. Bemerken wir gleich hier, dass Euler unter dem 24. Juni 1760 diesen Zweifeln durch die Erläuterung ein Ziel setzte, die Stärke, mit welcher ein Schall das Gehörorgan treffe, hänge von zwei Factoren ab, von der Grösse der Schwingungen und von der Geschwindigkeit der schwingenden Theilchen; haben also beide ein der Entfernung umgekehrt proportionales Maass, so muss das Product, d. i. die thatsächliche Stärke der Schallempfindung, im Quadrat der Entfernung abnehmen. Eben dasselbe muss auch für das Licht gelten, wenn es aus Schwingungen eines elastischen Mittels besteht, und so erledige sich ein von Daniel Bernoulli Lagrange gegenüber ausgesprochenes Bedenken. Denn Lambert habe in seiner Photometrie die Abschwächung des Lichtes im quadratischen Entfernungsverhältnisse festgestellt, ohne von der Geschwindigkeit, noch von der Grösse der Schwingungen ein Wort zu sagen. Lagrange verallgemeinert hierauf die am 26. December 1759 schon besprochene Dif-

ferentialgleichung noch weiter zu 
$$z^n \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + m c \cdot \frac{\partial \left( \frac{r}{z} \right)}{\partial z}.$$
 Auch

sie gehört dem Problem der Luftschwingungen in einem Kegel an, aber unter der Voraussetzung verschiedener Dichtigkeiten der in dem kegelförmigen Raume enthaltenen Luftmasse, und für  $m = 0$  giebt sie die Schwingungen von Saiten von ungleicher Dicke. Die Discussion dieses letzteren Falles lässt erkennen, dass im Allgemeinen derartige Saiten, in Schwingung versetzt, ihre erste Gestalt nie zum zweiten Male wieder erlangen, somit einen gleichmässigen Ton hervorzubringen nicht im Stande sind, was mit der Erfahrung, dass solche Saiten den Musikern falsch tönen, in Uebereinstimmung steht. Den letzten Gegenstand dieses interessanten Briefes bildet die Frage, ob die Grösse der Schwingungen eine Beschleunigung ihrer Fortpflanzung zur Folge haben könne, eine Frage von Wichtigkeit, indem die experimentellen Geschwindigkeitsmessungen, wie sie z. B. Lacaille 1738 anstellte, stets eine raschere Verbreitung ergaben, als seit Newton theoretisch herausgerechnet worden war. Lagrange ist geneigt, aus seinen Formeln die Unmöglichkeit der Beschleunigung der Fortpflanzung durch die Grösse der Schwingungen anzunehmen, „aber ich sträube mich dagegen, über diesen Punkt mich zu entscheiden, bevor ich Ihr Urtheil darüber habe, welches ich mich recht sehr beeile, mir zu erbitten“. In der Antwort vom 24. Juni 1760 pflichtet Euler den Schlüssen Lagrange's bei. Allein er geht einen Schritt weiter, er sucht eine anderweitige Erklärung für jenen Gegensatz zwischen vorausberechneter kleinerer und wirklich gemessener grösserer Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Flüssige Massentheilchen,



## Recensionen.

**Die Geometrie der Lage.** Vorträge von Dr. THEODOR REYE, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg i. E. 2. vermehrte Aufl. 1. Abtheilung.

Die besten deutschen Lehrbücher der synthetischen Geometrie sind wohl unbestritten: Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, bearbeitet von Schroeter, und Reye's Vorträge über Geometrie der Lage. Beide, im Jahre 1866 erschienen, haben in kurzer Zeit die zweite Auflage erlebt, das erste 1876, das andere 1877. Von der zweiten Auflage des letzteren ist allerdings bis jetzt nur die erste Abtheilung erschienen, diese aber in erheblich erweitertem Umfange. In dieser neuen Auflage enthält sie, wenn auch häufig in bedeutend kürzerer Form, fast denselben Inhalt, wie die Steiner'schen Vorlesungen von den Grundgebilden der ersten Paragraphen bis zu den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes in den letzten. Nach der Definition der Grundgebilde muss jedes Lehrbuch der synthetischen Geometrie sofort den Begriff der projectivischen Gebilde feststellen. Steiner nennt zwei Gebilde projectivisch aufeinander bezogen, wenn zwischen irgend vier Elementen des einen Gebildes und den entsprechenden des andern Gleichheit der Doppelverhältnisse stattfindet. Um die bei dieser Definition nothwendige Rechnung zu vermeiden und „zur Erkenntniss der geometrischen Wahrheiten durch directe Anschauung zu gelangen“, folgt Reye dem von Staudt eingeschlagenen Wege. Der Begriff des harmonischen Gebildes wird durch directe stereometrische Betrachtungen gewonnen; ebenso unmittelbar folgt der Satz: Aus einem harmonischen Gebilde ergeben sich durch Projiciren und Schneiden immer wieder harmonische Gebilde. Die perspectivische Lage der Grundgebilde giebt dann die Veranlassung, diese aufeinander zu beziehen, so dass jedem Elemente des einen ein Element des andern und jeder stetigen Aufeinanderfolge von Elementen des einen Gebildes eine stetige Aufeinanderfolge von Elementen des andern entspricht; es folgt, dass je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des andern entsprechen. Zur projectivischen Beziehung gelangt der fünfte Vortrag ungefähr mit folgenden Worten: „Werden zwei einförmige Grundgebilde auf ein und dasselbe dritte per-





nung führen die Erzeugnisse projectivischer Gebilde zweiter Ordnung. Der 12. Vortrag ist den involutorischen Gebilden gewidmet; der 14. behandelt die Aufgaben zweiten Grades, deren Auflösung auf die bekannte Steiner'sche Construction zurückgeführt wird. Diese Aufgaben geben Anlass, in der neuen Auflage den Begriff der imaginären Elemente in die synthetische Geometrie einzuführen, und zwar geschieht es hier durch den Satz, dass zwei projectivische Gebilde auf demselben Träger zwei reelle oder conjugirt imaginäre Elemente entsprechend gemein haben.

Zu diesen zwölf Vorträgen, welche die reine Geometrie der Lage behandeln und die man ohne irgendwelche mathematische Vorkenntnisse verstehen kann, gesellen sich drei über metrische Relationen der Kegelschnitte. Sie behandeln namentlich die Durchmesser, Axen, Brennpunkte und — neu in dieser Auflage hinzugekommen — die Hauptaxen und Symmetrieebenen, Focalaxen und cyklische Ebenen einer Kegelfläche zweiter Ordnung. Wie schon das Vorwort erwähnt, sind, „um den Zusammenhang mit der analytischen Geometrie herzustellen“, in dem Vortrage über die Durchmesser neu hinzugefügt die Ableitungen der Gleichungen der Curven zweiter Ordnung.

Als bedeutendste Aenderung giebt der Verfasser selbst an die Hinzufügung von 213 Aufgaben und Lehrsätzen, die in 15 Abschnitte getheilt sind. Von diesen entsprechen neun den gleichnamigen Vorträgen; ein zehnter behandelt, gestützt auf das Princip der reciproken Radien, die Kreisverwandtschaft, und der elfte die geradlinigen Flächen dritter Ordnung, als Erzeugnisse zweier projectivischen Punktreihen erster und zweiter Ordnung.

Der Schwerpunkt der Aenderung liegt aber unbedingt in den letzten vier Abschnitten. In Nr. 165 des zwölften Abschnittes „Polvierecke und Polvierseite von Kegelschnitten“ wird für die Vierecke, bei denen jede Seite ihrer Gegenseite in Bezug auf einen Kegelschnitt  $\gamma^2$  conjugirt ist, die Bezeichnung Polvierecke und für die Vierseite, bei denen jeder Ecke ihre Gegenecke bezüglich  $\gamma^2$  conjugirt ist, die Bezeichnung Polvierseite eingeführt. Der Reihe nach wird gezeigt, dass drei Ecken eines Polvierecks die vierte, und drei Seiten eines Polvierseits die vierte bestimmen (167, 168), dass die sechs Ecken  $ABCD$  und  $AB'C'D'$  zweier Polvierecke auf einem Kegelschnitte liegen (169), dass die sechs Ecken eines Polvierecks und Poldreiecks, welche eine Ecke gemeinschaftlich haben, auf einem Kegelschnitte liegen (170), dass die sieben Ecken zweier Polvierecke  $ABCD$  und  $AB'C'D'$  von zwei Kegelschnitten  $\gamma^2$  und  $\gamma_1^2$  auf einem Kegelschnitte liegen (171) und endlich, dass alle Paare von Punkten, die in Bezug auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte conjugirt sind, auf einer Curve dritter Ordnung liegen (172). Der 13. Abschnitt: „Lineare Systeme und Gewebe von Kegelschnitten“, bestimmt (173, 174, 175) die Beziehungen zweier Kegelschnitte  $\kappa^2$  und  $\gamma^2$ , von



dass jede Curve der Schaarschaar auf jede Curve des Netzes sich stützt.“ Darauf ergeben sich die Haupteigenschaften der Curve dritter Ordnung (Tripelcurve nach Steiner), welche sämtliche Punkte enthält, die in Bezug auf alle Curven des Netzes conjugirt sind. — Die letzten vier Abschnitte enthalten auf 25 Seiten allerdings in gedrängtester Kürze fast denselben Inhalt, welchen wir bei Schroeter von S. 224 — 534 abgehandelt finden, bis auf die Theorie des imaginären Kegelschnittes. Wenn auch im Interesse Derjenigen, für welche die Geometrie der Lage zunächst bestimmt ist, der Studirenden an Universitäten und polytechnischen Schulen, eine etwas breitere Behandlung vielleicht erwünscht wäre, so muss es gegenüber der ersten Auflage als ein entschiedener Fortschritt erklärt werden, dass die Theorien der Kegelschnittbüschel und Netze hier, ohne räumliche Betrachtungen zu Hilfe zu nehmen, allein durch solche in der Ebene entwickelt werden. — Als charakteristischer Unterschied der Behandlung in der Geometrie der Lage und den Steiner'schen Vorlesungen ist hervorzuheben, dass man in letzteren die geometrischen Gebilde, Kegelschnittbüschel und Netz entstehen sieht und aus der Entstehungsart den organischen Zusammenhang ihrer Eigenschaften erkennt, während in der ersteren diese Gebilde uns als etwas Fertiges entgegentreten und aus ganz allgemeinen Sätzen ihre bekannteren Eigenschaften hergeleitet werden. Wir gelangen daher zu diesen Eigenschaften in umgekehrter Reihenfolge: bei Reye aus dem Stephen Smith'schen Satze zu der charakteristischen Eigenschaft des Kegelschnittbüschels, jede Transversale in einer Involution zu schneiden, bei Schroeter zu diesem Satze aus der Entstehungsart in aufsteigender Folge bis zum Stephen Smith'schen Satze, der auf S. 534 sich als unmittelbare Folgerung aus den Eigenschaften des Kegelschnittnetzes ergibt. Nachdem vorher gezeigt ist, dass durch jedes Kegelschnittnetz ein Kegelschnittgewebe (II. Stufe), „ein Gebilde von gleicher Mächtigkeit mit dem Kegelschnittnetz und nach dem Princip der Polarität aus diesem hervorgegangen“, bestimmt ist, geht die Entwicklung weiter: „Gehen wir nun von vier Kegelschnitten aus, so bestimmen dieselben zu je dreien verbunden vier Kegelschnittnetze, zu deren jedem ein bestimmtes Gewebe gehört. Diese vier Gewebe haben eine Kegelschnittschaar gemeinschaftlich. Wir können aber noch unendlich viele andere Kegelschnittnetze und zugehörige Gewebe bilden, indem wir aus jenen ersten vier Netzen irgend drei Kegelschnitte herausnehmen, welche nicht demselben Netze angehören, und sie zur Bildung eines neuen Netzes verwenden. Die Tripelcurven für alle diese Netze laufen durch dieselben sechs Ecken eines vollständigen Vierseits, und die sämtlichen zugehörigen Kegelschnittgewebe haben eine Schaar gemeinschaftlich. Stellt man vermittelst fünf Kegelschnitten alle möglichen Netze und dazu gehörigen Gewebe her, so haben letztere einen Kegelschnitt gemein.“ So werden



führt dies jedoch nicht in jener oft unangenehm knappen Weise aus, die bei dem „Taschenbuche“ unvermeidlich war. Es kündigt sich zwar selbst nur als eine zweite umgearbeitete Auflage an, hat aber, wenn die folgenden Lieferungen in der Art und in dem Umfange der bis jetzt vorliegenden ersten erscheinen, vollkommen Anspruch darauf, ein neues Werk genannt zu werden. Der Herr Verfasser wollte dies vermuthlich auch durch die Umänderung des Titels andeuten, hätte aber, nach Ansicht des Referenten, wohl besser gethan, es direct auszusprechen, denn das „Handbuch“ ist — so weit man bis jetzt zu urtheilen vermag — nicht mehr „eine Sammlung von Resultaten der niederen und höheren Vermessungskunde“, sondern ein ausführliches Lehrbuch derselben, mithin ein Werk anderer Art, als das 1873 erschienene.

Der Gesamteindruck, welchen die erste Lieferung (288 Seiten in Grossoctav) erzeugt, ist ein sehr günstiger: vielfach ist Neues geboten, mit Geschick das Nothwendige ausgewählt, das Entbehrliche weggelassen. Erklärungen und Theorien sind vollkommen deutlich gegeben, ohne ins Breite zu laufen; an geeignet gewählten Beispielen und an Tabellen ist das Werk ungewöhnlich reich, was die Studirenden und die Praktiker hoch schätzen werden.

Der erste Theil des Buches betrifft die „Theorie der Beobachtungsfehler oder die Methode der kleinsten Quadrate“. Eine Einleitung bietet die Hauptzüge der Geschichte der Ausgleichungsrechnung und giebt Literaturnachweise. Das empirisch begründete Princip der kleinsten Quadratsumme wird als Grundlage benutzt, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung nur nebenbei Berücksichtigung findet. Hierdurch schon unterscheidet sich das „Handbuch“ von dem „Taschenbuche“, und zwar zum Vortheile des ersteren, denn für sehr Viele, insbesondere für die Praktiker (denen das Werk ja auch dienen soll) ist die elementare Darstellung meist die bessere, also die, welche in den Vordergrund gerückt werden muss, wenn Abschreckungen vermieden werden sollen.

Dieser erste Theil umfasst 134 Seiten, während ihm im „Taschenbuche“ kaum ein Viertel dieses Raumes gewidmet war. Er wird in drei Capiteln abgehandelt; das erste derselben führt die Ueberschrift: Ausgleichungsrechnung nach dem Princip der kleinsten Quadratsumme. Dass der Herr Verfasser hier die zwar etwas längere, aber richtige Ausdrucksweise „kleinste Quadratsumme“ benutzt, billigt der Referent sehr, bedauert aber, dass es nicht consequent geschehen ist. Ein Mann von hervorragender Bedeutung, wie Herr Jordan, wäre geeignet, hier Bahn zu brechen. Es behandelt dieses erste Capitel in geschickter und elementarer Weise (mit nur einiger Benutzung der Differentialrechnung) zunächst den durchschnittlichen und den mittleren Fehler, das Fehlerfortpflanzungsgesetz, das einfache und das allgemeine arithmetische Mittel (*letzteres unter Einführung der Gewichte*), vermittelnde Beobachtungen



aber Parallelverschiebungen als Fehler anhaften. Dabei kommt er zwanglos auf den Begriff der Genauigkeitscurven (richtiger gesagt: der Curven gleicher Genauigkeit) und auf die Fehlerellipse. Sodann folgt die Untersuchung des Vorwärtseinschneidens mit zwei Strahlen und die Herleitung des für jeden Praktiker wichtigen Satzes, dass die günstigste Visur hierbei nicht unter  $90^\circ$ , sondern unter  $109^\circ 28'$  stattfindet. Diesem schliesst sich das Seitwärtseinschneiden an und das Pothenot'sche Problem, deren Genauigkeitsgrade unter Aufzeichnung der zugehörigen Curven sehr geschickt dargestellt und verglichen sind.

Den Schluss des Capitels bildet die Herleitung des mittleren Fehlers eines Punktes, dessen Lage durch mehr als zwei Beobachtungen bestimmt wurde, von denen jede einen geometrischen Ort für ihn liefert, und — hiermit zusammenhängend — die Betrachtung der Fehlerellipse für mehrfache Punktbestimmung, die einfache Triangulirung, das Vorwärtseinschneiden mit drei Strahlen und das Pothenot'sche Verfahren unter Benutzung dreier Winkel, ebenfalls mit Darstellung zugehöriger Genauigkeitscurven.

Der erste Theil des Buches enthält, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich ist, von der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme nicht nur Dasjenige, was die niedere Geodäsie braucht, sondern auch Das, was die höhere nöthig hat.

Des Buches zweiter Theil bezieht sich auf die niedere Geodäsie, nämlich auf Dasjenige, was von der Vermessungskunde für technische und landwirthschaftliche Zwecke nöthig ist. Es wird hier mit wenig Worten immer viel gesagt; für den Anfänger ist das vielleicht oft eine unbequeme Knappheit, dem Verfasser aber macht es Ehre. Dass nicht zuerst die Instrumente und dann die Messungen zur Besprechung gelangen, sondern beide gleichzeitig Behandlung finden, wird von Vielen als nicht systematisch getadelt werden, bietet aber manche Vorthelle dar.

Die ersten fünf Capitel dieses zweiten Theiles führen ganz dieselben Ueberschriften, wie in dem 1873 erschienenen „Taschenbuche“; während sie aber in letzterem etwa 70 Seiten füllten, haben sie jetzt reichlich den doppelten Umfang. Das erste dieser Capitel behandelt (auf 32 Seiten) die einfachsten Vermessungsoperationen und ihre Verbindung zu kleinen Aufnahmen. Hier gelangen zunächst Kreuzscheibe, Winkelspiegel, Spiegelkreuz und Prismeninstrumente zu einer Besprechung, die dem Genauigkeitsgrade dieser Werkzeuge höchst lobenswerthe Aufmerksamkeit schenkt. Dann folgt die Behandlung der Messlatten und ihrer Längenvergleiche, der Stahlbänder, der Ketten und der mit diesen Werkzeugen ausgeführten Längenermittlungen. Auch hier ist wieder mit vieler Sorgfalt und unter Benutzung der neuesten Untersuchungen die erreichbare Genauigkeit berücksichtigt, und zwar nicht nur bezüglich der unregelmässigen, sondern auch bezüglich der





Combination zweier Linsen, sodann eine Besprechung der Lupe, des einfachen astronomischen Fernrohres, der Fernrohre mit mehr als zwei Linsen und des Mikroskopes.

Das fünfte Capitel (57 Seiten) betrifft den Theodolit. Es behandelt zunächst seine Einrichtung (mit Einschluss der „Ablesevorrichtungen“ Nonius und Mikroskop, nebst Adjustirung der letzteren), sodann seine Prüfung und Berichtigung, die Elimination der Axenfehler und, sehr eingehend, den Einfluss der letzteren; sodann die Excentricität des Fernrohres, diejenige zwischen Limbus und Alhidate, die Untersuchung der Theilungsfehler, das Messen der Horizontalwinkel, die Fehler der Repetitionsmessung (mit Rücksicht auf Bessel, Struve und die badische Triangulirung), endlich das Messen der Vertikalwinkel mit Höhenkreis oder Schraube unter Hinweis auf die einschlagenden Arbeiten von Stampfer, Koristka, Barth und Pfaundler.

Capitel VI (6 Seiten) giebt das Nothwendige über Coordinaten im Allgemeinen und schliesst mit einer bezüglich siebenstelliger Logarithmentafeln an die Praktiker gerichteten Mahnung, welche schon der berühmte Encke aussprach, indem er erklärte, dass er höchst selten andere als fünfstellige Tafeln benutzt habe.

Den Schluss der ersten Lieferung des Werkes bildet der Anfang eines Capitels über polygonale Züge.

Die Literatur ist bei den einzelnen Abschnitten umfänglich berücksichtigt, hingegen hat die Geschichte der Geodäsie nur bezüglich der Ausgleichungsrechnung hinreichende Erwähnung gefunden, und zwar am Anfange des ersten Theiles. Da dies geschah, so musste man am Anfange des zweiten Theiles (oder doch bei den einzelnen Capiteln desselben) eine ebenso ausführliche Berücksichtigung der historischen Seite erwarten. Diese ist nicht erfolgt; doch giebt sich Referent der Hoffnung hin, am Schlusse des Werkes entweder die nöthigen Mittheilungen zu finden, oder Nachweise, welche dem Leser sagen, wie er sich in der kürzesten Zeit mit den Hauptzügen der Geschichte der gesammten Geodäsie (über die nur wenig veröffentlicht wurde) bekannt machen kann. Was in dieser Beziehung das „Taschenbuch“ früher geboten hat, genügt nicht, denn es bezieht sich fast nur auf die Gradmessungen. Die völlige Unkenntniss der Geschichte anderer Gebiete der Geodäsie tritt aber leider unter Studirenden und Praktikern sehr häufig auf, und ein Werk wie das Jordan'sche ist berufen, hier bessern zu helfen.

Die dem Handbuche eingedruckten Holzschnitte sind recht gut, erreichen aber meist nicht ganz die Vollkommenheit derjenigen, welche die bekannte treffliche Vermessungskunde von Bauernfeind darbietet. Der Druck ist klein, aber scharf; Druckfehler sind nur in sehr geringer Zahl vorhanden, sinnstörende fast gar nicht.

---

Der dritte Theil des Buches wird (laut Prospect) die sphärische Geodäsie nach Soldner und Bohnenberger, die sphäroidische nach Gauss und Bessel darbieten und neuere Untersuchungen beifügen. Das ganze Werk soll 60—65 Bogen enthalten, etwa 16 Mk. kosten und noch in diesem Jahre zum Abschlusse gelangen.

Die bisherigen hervorragenden Leistungen des Herrn Verfassers in den verschiedensten Gebieten der Geodäsie lassen mit Sicherheit erwarten, dass die folgenden Lieferungen der ersten an Güte nicht nachstehen werden. Ist dies der Fall, so darf sich das Werk als ebenbürtig neben die besten bis jetzt erschienenen Lehrbücher der Vermessungskunde stellen und wird in vielen Beziehungen eine sehr wichtige Ergänzung und Erweiterung derselben bilden. Der Referent empfiehlt es bestens nicht nur den Geodäten und den Studirenden der Technik, sondern auch denen der Mathematik, letzteren deshalb, weil es ihnen viele werthvolle Anregungen bieten wird.

Dresden, Juli 1877.

A. FUHRMANN.

# Bibliographie

vom 1. October bis 30. November 1877.

---

## Periodische Schriften.

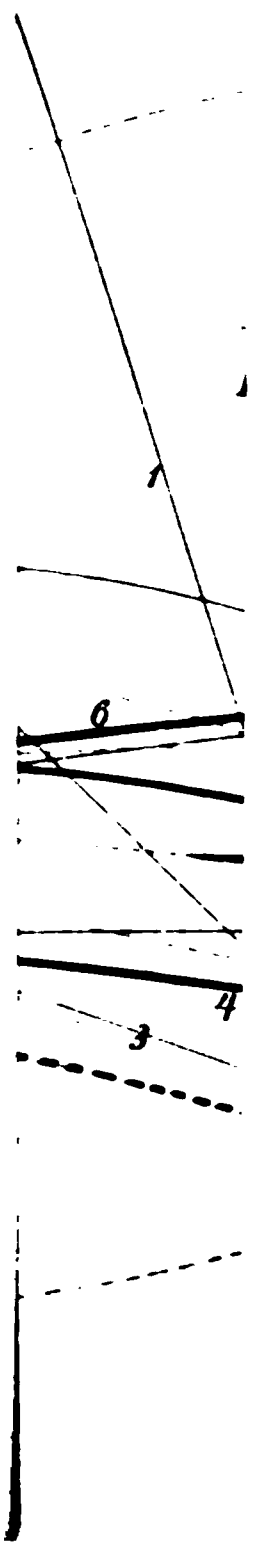
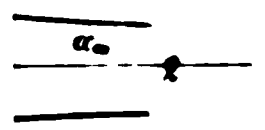
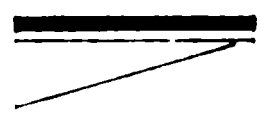
- Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahr 1876. Berlin, Dümmler. 4 Mk. 60 Pf.
- Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrg. 1876. Ebendas. 28 Mk.
- Sitzungsberichte der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1877, 2. Heft. München, Franz. 1 Mk. 20 Pf.
- Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 75. Bd. 1. Abth., 1. bis 3. Heft. Wien, Gerold. 5 Mk. 20 Pf.
- , 2. Abth., 4. Heft. Ebendas. 3 Mk.
- CRELLE's Journal für Mathematik, fortgesetzt von BORCHARDT. 84. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 12 Mk.
- Repertorium der literarischen Arbeiten aus der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von L. KÖNIGSBERGER und G. ZEUNER. 2. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 3 Mk.
- Fortschritte der Physik. 29. Jahrg. 1. Abth. (Jahr 1873). Redig. von B. SCHWALBE. Berlin, G. Reimer. 9 Mk.
- Meteorologische Beobachtungen in Dorpat. 10. Bd. Jahr 1875, redigirt von A. v. OETTINGEN und K. WEIHRAUCH. Leipzig, Köhler. 1 Mk. 50 Pf.

## Reine Mathematik.

- WINCKLER, A., Ueber eine den linearen Differentialgleichungen II. Ordnung entsprechende Relation. (Akad.) Wien, Gerold. 20 Pf.
- WIECKE, P., Algebraisches Uebungsbuch. 1. Reihe. 2. Aufl. Berlin, G. Reimer. 75 Pf.
- IGEL, B., Einige Sätze und Beweise zur Theorie der Resultante. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.
- HATTENDORFF, K., Algebraische Analysis. Hannover, Rümpler. 7 Mk. 20 Pf.
- GEGENBAUER, L., Ueber die Function  $C_n''(x)$ . (Akad.) Wien, Gerold. 30 Pf.



- LOSCHMIDT, J., Ueber den Zustand des Wärmegleichgewichts eines Systems von Körpern mit Rücksicht auf die Schwerkraft. IV. Mitthlg (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.
- PUSCHL, C., Ueber den innern Zustand und die latente Wärme der Dämpfe. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.
- PULUJ, J., Ueber die Diffusion der Dämpfe durch Thonzellen. 2. Abb. (Akad.) Wien, Gerold. 50 Pf.
- MAXWELL, J. C., Theorie der Wärme. Breslau, Maruschke & Berendt. 6 Mk.
- MARGULES, M., Ueber die stationäre Strömung der Elektrizität in einer Platte bei Verwendung geradliniger Elektroden. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.
- URBANITZKY, A. v., Ueber die Schichtung des elektrischen Lichtes. Wien, Hölder. 1 Mk.
- НВОМÁДКО, F., Physikalische Wandtafeln (12 Blatt) mit Text: „Bilder aus der Physik“. Tabor, Jansky. 15 Mk.
- BOHN, O., Ergebnisse physikalischer Forschung. 2. Lief. Leipzig, Engelmann. 8 Mk.
- HORNSTEIN, C., Ueber die wahrscheinliche Abhängigkeit des Windes von den Perioden der Sonnenflecke. (Akad.) Wien, Gerold. 60 Pf.
-



1

Fig. 7.

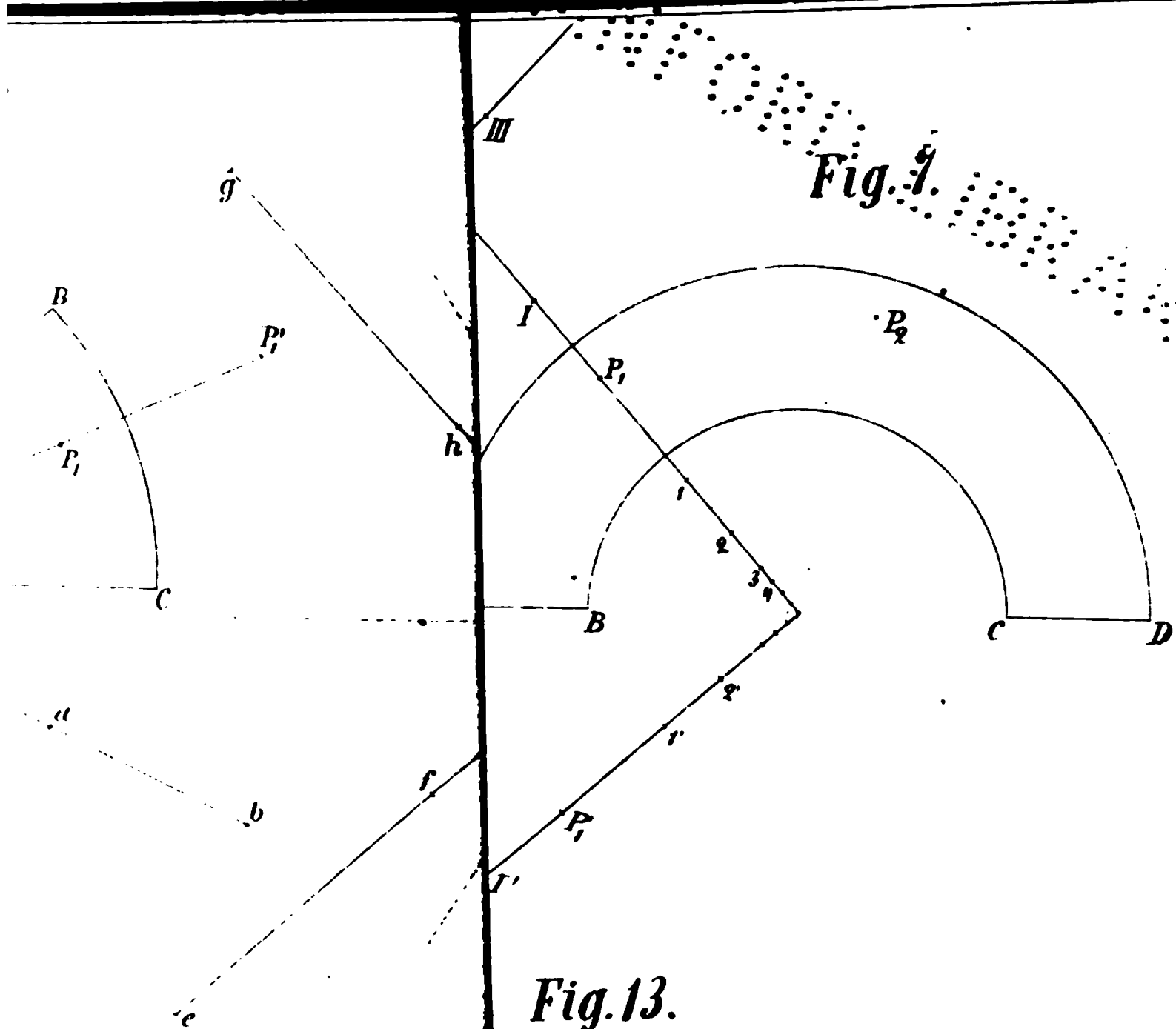


Fig. 13.

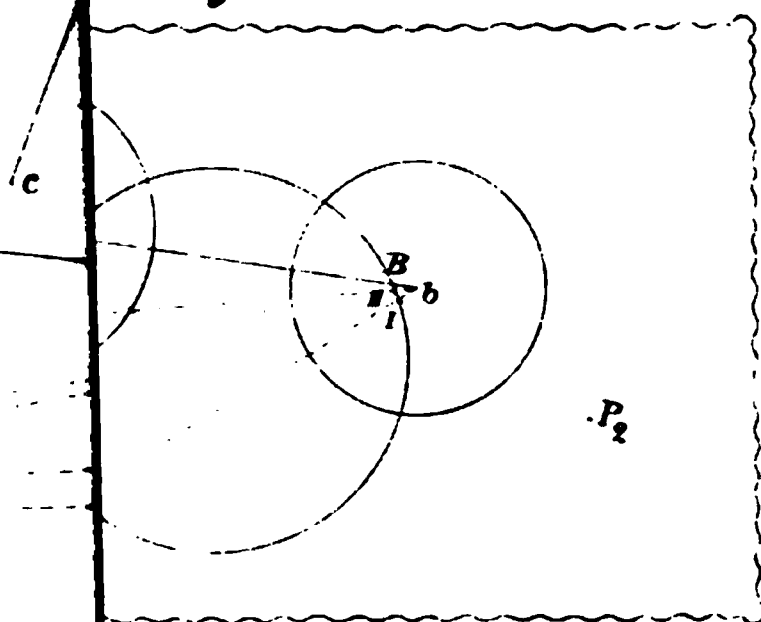


Fig. 11.

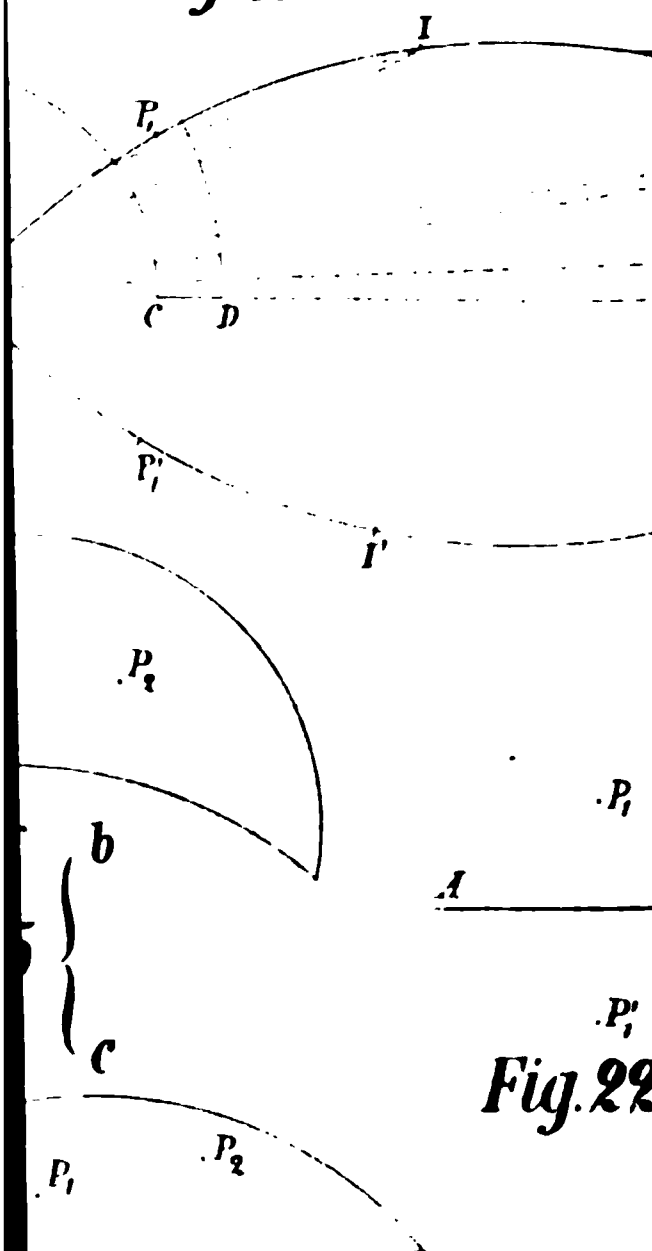


Fig. 16.

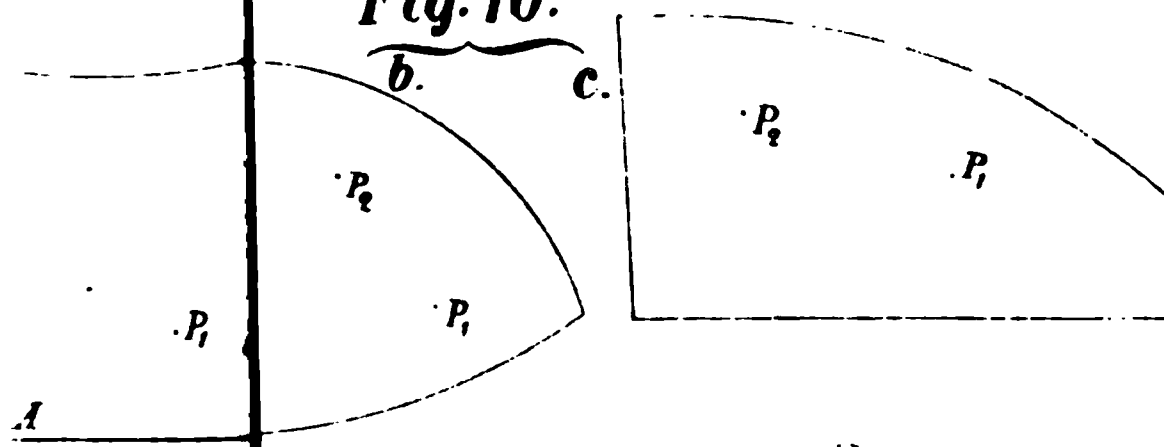
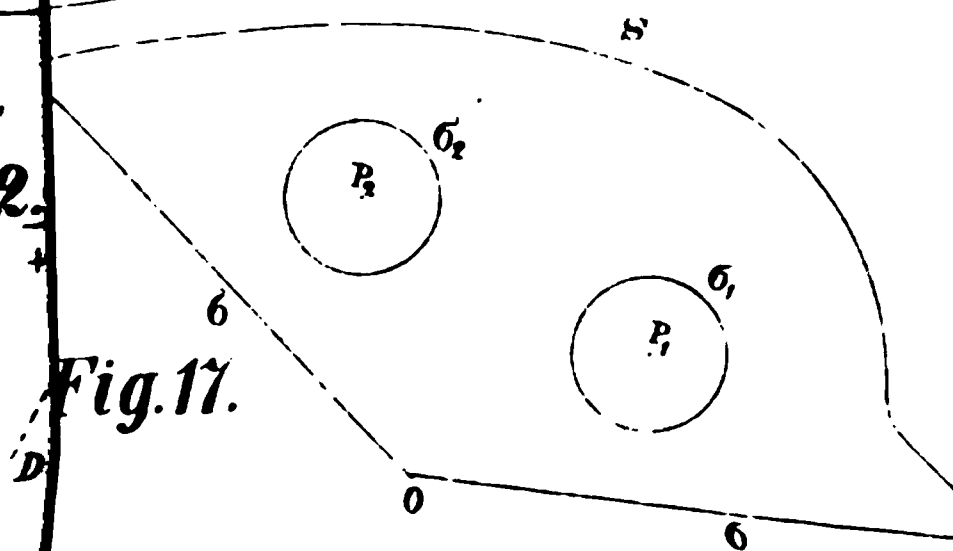


Fig. 22.

Fig. 17.







# Historisch-literarische Abtheilung.

---

## Ueber den Antheil Petřina's an der Erfindung des telegraphischen Gegensprechens.

Von  
Dr. ED. ZETZSCHE.

---

Den ersten Anlauf zu einer gleichzeitigen mehrfachen Telegraphie machten bereits im Jahre 1849 Siemens und Halske. Sie nahmen zwar auch den Gedanken in ihr am 23. October 1849 nachgesuchtes englisches Patent (Nr. 13062, vom 23. April 1850) auf,<sup>1)</sup> überzeugten sich aber bald von der Schwierigkeit der Lösung bei einer grösseren Anzahl von Drähten. Es blieb daher bei dem bloßen Gedanken und selbst dieser ward erst 1856 durch eine Mittheilung darüber in Poggen-dorff's Annalen der Physik und Chemie (Bd. 98, S. 115) weiter bekannt.

Die ersten Gegensprechversuche auf der Linie wurden 1853 zwischen Wien und Prag von dem damaligen österreichischen Telegraphendirector Dr. Wilhelm Gintl angestellt. Diese Versuche wurden zuerst mit Morsetelegraphen vorgenommen, und es wurden die dabei benutzten Apparate zuerst im December 1853, und zwar von einem, Gintl unbekannten Verfasser und ohne Gintl's Zuthun<sup>2)</sup> in einem nur mit G. unterzeichneten<sup>3)</sup> Artikel des Polytechnischen Centralblattes<sup>4)</sup> beschrieben. Gintl selbst hat über diese Versuche Nichts veröffentlicht; durch die Schwierigkeiten aber, auf welche er infolge „der fortwährenden Veränderungen der Linienstromstärken“ in der dabei nöthigen feineren Regulirung der Stromstärken stiess, ward er veranlasst, anstatt der Morseapparate seinen

---

1) S. 19 der Patentbeschreibung; *sheet* 3, Fig. 11.

2) Vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1. Bd. S. 304.

3) Von dem späteren sächsischen Telegraphendirector L. Galle herrührend.

4) Jahrgang 1853, S. 1473; daraus in Dingler's Polytechnisches Journal 1854, Bd. 131, S. 191. — Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 2, S. 28.

chemischen Schreibtelegraphen zu verwenden, über welchen er ~~der~~ Wiener Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 28. April 1853 ausführliche Mittheilung gemacht hatte.<sup>1)</sup> Diesen chemischen Gegensprecher beschrieb Gintl ausführlich in der Sitzung der Wiener Akademie vom 30. November 1854,<sup>2)</sup> und es mag gleich hier hervorgehoben werden, dass bei demselben zwar der nämliche Doppeltaster, wie bei den Morsegegensprechern und auch eine Ausgleichungsbatterie Verwendung fand, dass er sich indessen insofern von dem letztern ganz wesentlich unterschied, als bei letzterem dem localen Ausgleichungsstrom ein von dem Linienstromwege vollständig getrennter Stromkreis angewiesen ist, eine Stromverzweigung also nicht eintritt, bei dem chemischen dagegen beide Stromkreise ein gemeinschaftliches Stück enthalten und deshalb Zweigströme auftreten müssen.

Schon während der Gintl'schen Versuche verbreitete sich das Gerücht in Wien, dass der Professor der Physik in Prag, Dr. Franz Adam Petřina, Gintl bei dessen Anwesenheit in Prag die Idee des Gegensprechens mitgetheilt habe; auch in weiteren Kreisen fand dieses Gerücht Verbreitung und 1856 fand sich E. W. Siemens veranlasst, in Poggendorff's Annalen (Bd. 98, S. 120) darauf hinzuweisen, wie wünschenswerth eine bestimmte Aufklärung darüber sei, da Gintl selbst nirgends das Gegensprechen (mit Morseapparaten) als seine Erfindung in Anspruch genommen habe. Petřina konnte der darin liegenden Anforderung nicht genügen, weil er bereits im Jahre 1855 gestorben war; Gintl aber hat jenen öffentlich und so bestimmt ausgesprochenen Wunsch zu erfüllen keine Veranlassung genommen.

Bei Bearbeitung der mehrfachen Telegraphie für das kürzlich erschienene Schlussheft des ersten Bandes meines Handbuchs der Telegraphie trat an mich die Nöthigung heran, mich in dieser Prioritätsfrage für oder wider zu entscheiden, und da inzwischen ausser Petřina auch der in gewissem Sinne mitbetheiligte Dr. Stark in Wien verstorben war, so schien es mir richtiger, nicht den einzigen überlebenden Betheiligten, Dr. Gintl, unmittelbar darüber zu befragen, sondern den Versuch zu machen, aus den vorhandenen Schriftquellen und den Aussagen noch lebender Unbetheiligter zu einer Entscheidung zu gelangen. In dem Handbuche (S. 546) konnte ich diese Entscheidung wegen Raum mangels nicht in der erwünschten Weise begründen, und ich that es daher zunächst Anfang August 1877 in dem Journal  *télégraphique* (Bd. III, S. 65).

1) Vergl. Sitzungsberichte Bd. 10, S. 616 bis 626.

2) Vergl. Sitzungsberichte Bd. 14, S. 401 ff.; daraus in der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins Bd. 7, S. 136, und der Telegraphenvereins Zeitschrift 2. Bd., S. 25 und 202. Aus den Mai 1855 datirte Abänderung dieses chemischen Gegensprechers bespricht Gintl auf S. 135 des 2. Bandes der Telegraphenvereins-Zeitschrift.

und hoffte damit zugleich, zu einer vollen Klarlegung den Anstoss zu geben. Um auf die Erfüllung dieser Hoffnung mit um so grösserer Gewissheit rechnen zu dürfen, halte ich den Abdruck der Begründung meiner Entscheidung auch in einer deutschen Zeitschrift für angezeigt und ich lasse deshalb jenen im Journal  *télégraphique*  abgedruckten Artikel hier in dem nur sehr wenig geänderten ursprünglichen Wortlaute folgen.

I. Ich habe mich zuvörderst darnach umgesehen, ob Gintl irgendwo die Erfindung des Gegensprechens mit Morseapparaten unzweideutig für sich in Anspruch nimmt. In erster Linie kommt hierbei das in Frage, was Gintl in seinem schon erwähnten Vortrage vom 30. November 1854 sagt. Die betreffende Stelle auf S. 414 (Bd. 14) der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Sitzungsberichte der Wiener Akademie lautet:

„Ich habe mich schon im verflossenen Jahre längere Zeit hindurch bemüht, die Doppelcorrespondenz auf demselben Leitungsdrahte mit dem Morse'schen Schreibtelegraphen zu Stande zu bringen, und bei meinen in dieser Beziehung vielfältig auf der Telegraphenlinie zwischen Wien und Prag im Monate Juli 1853 angestellten Versuchen ist es mir zwar gelungen, Depeschen gleichzeitig in entgegengesetzter Richtung an ihre Bestimmungsorte zu befördern, wobei es aber oft geschah, dass nach einigen, an beiden Stationen gegenseitig recht gut lesbaren Worten eine Confundirung der Zeichen auf jedem Stationsapparate eintrat, sobald nämlich der Linienstrom eine Aenderung in seiner Stärke erlitt und es nicht gleich möglich war, die Stärke des Localstromes in demselben Maasse zu verändern.

„Aus diesem Grunde habe ich auch die gleichzeitige Doppelcorrespondenz mit dem Morse'schen Schreibtelegraphen vorläufig nicht weiter verfolgt und mich an die Durchführung derselben mittels electrochemischen Schreibapparates gehalten, welche mir vollständig gelungen ist.“

Offenbar liegt in den Worten „zu Stande zu bringen“ durch aus nicht unbedingt, dass die Idee des Gegensprechens und die Einrichtung der Apparate dazu eine Erfindung von Gintl sei. Gerade das „zu Stande bringen“ erscheint mir aber sehr wesentlich; der österreichische Telegraphendirector Gintl — und in Oesterreich wohl er allein — hatte dazu ohne Weiteres die Macht (abgesehen von der sachlichen Ausführbarkeit); nicht so der Professor Petřina, wenn er der Erfinder war.

Ebenso zwingt der Ausdruck<sup>1)</sup> Gintl's: „des von mir dabei (d. h. bei den Versuchen zwischen Wien und Prag) angewandten

1) Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 2, S. 28.

und Verfahrens“ nicht zu der Annahme, dass Apparat und Verfahren eigene Erfindung waren.

Entscheidender könnten einige Stellen in der im Januar 1855 niedergeschriebenen Entgegnung<sup>1)</sup> Gintl's auf eine Aeusserung des Dr. v. Icilius sein, worin dieser die Priorität der Erfindung des gleichzeitigen Telegraphirens für C. Frischen in Anspruch nimmt. Gintl verwahrt sich hier zunächst dagegen, dass er „im Jahr 1853 bloß eine Idee zur Erreichung des genannten Zweckes ausgesprochen habe“ und fährt dann fort: „Schon im Monate Juli 1853 sind von mir .... gelungene Doppelcorrespondenzen mit den von mir dazu eingerichteten Morse'schen Schreibapparaten ausgeführt worden; und da ich aus meinem Verfahren kein Geheimniss machte, so ist dasselbe sammt der Einrichtung des ganzen Apparates in dem Leipziger polytechnischen Centralblatt von einem mir unbekannten Verfasser ausführlich beschrieben worden. Es war also nicht bloß eine Idee, welche ich damals ausgesprochen, sondern vielmehr in's Werk gesetzt habe“. Lassen aber auch die hier von Gintl — dem unbestrittenen Veranstalter jener Versuche mit dem Morse-Gegensprecher und dem Erfinder des chemischen Gegensprechers — gebrauchten Worte noch an Klarheit zu wünschen übrig, so bleiben die ebenda weiter folgenden Aeusserungen Gintl's: „wie Herr Dr. v. Icilius, nach dessen eigener Erklärung die von mir zuerst ausgegangene Idee und mein Doppel-Telegraphirungsverfahren Herrn Frischen erst zur Ausführung seines Verfahrens angeregt hat,“ ..... und: „meines schon im Jahre 1853 ohne mein Zuthun veröffentlichten Verfahrens; es wäre denn, dass Herr Dr. v. Icilius den Beweis liefern würde, Herr Frischen habe schon früher als ich das Doppel-Correspondenzprincip entdeckt und sei vor mir zur Durchführung desselben geschritten“ allein übrig, welche aber an Tragweite wesentlich einbüßen, sobald man sie als bloß gegen Frischen's Ansprüche gerichtet gelten zu lassen hat, und ausserdem durch die kurz vorhergehende Stelle: „diese von mir .... schon am 9. Juni ausgesprochene Idee basirt sich überdies auf die von mir entdeckte Thatsache, dass sich zwei elektrische Ströme in entgegengesetzter Richtung durch denselben Leitungsdraht gleichzeitig und ungehindert fortpflanzen, welches ich durch Versuche<sup>2)</sup> constatirt und in der erwähnten Sitzung auseinander gesetzt habe. Dieses Factum ist aber das eigentliche Princip, auf welchem die Doppelcorre-

1) Telegraphenvereins-Zeitschrift, Bd. 1, S. 304.

2) Nach den Wiener Sitzungsberichten Bd. 14, S. 400, wurden diese Versuche mit dem chemischen Schreibapparate angestellt, natürlich bevor dessen Verwendung zum Gegensprechen in Frage kam. — Uebrigens finde ich in dem Berichte über die Sitzung vom 9. Juni 1853 Nichts über eine derartige Mittheilung Gintl's.



wäre, mit dem Morse'schen Telegraphenapparate bei einem Leitungsdrahte zugleich hin und her zu telegraphiren. Den bei einer solchen doppelten Correspondenz zu machenden Bedingungen werde im gewünschten Maasse entsprochen, wenn man einen kleinen Localstrom zu Hilfe nimmt und das Relais, sowie den Taster nach der Angabe des Vortragenden einrichtet“.

III. Dazu wird mir versichert, dass einige Jahre später Petrina's Wittwe an die österreichische Telegraphenverwaltung ein Unterstützungsgesuch gerichtet habe, worin sie ausdrücklich (die Anwendung gemeinschaftlicher Batterien und) das Gegensprechen als Erfindungen ihres verstorbenen Gatten und somit gewissermassen als ihr Erbtheil bezeichnet.

IV. Ich habe mich ferner an eine vollkommen glaubwürdige und geeignete Persönlichkeit in Wien um weitere Auskunft gewandt und als Ergebnisse von Nachfragen, welche dieselbe vor einiger Zeit — und zwar nach Stark's Tode — bei Beamten hielt, welche Dr. Stark damals zur Hilfeleistung benutzte, erfahren, dass Stark zur Zeit, als er sich mit den ersten Versuchen über das Gegensprechen befasste, mit Petrina darüber in Briefwechsel stand, auch während der Versuche selbst in den Briefen Petrina's nachlas, ferner dass Gintl erst durch Stark Kenntniss von der Sache erhielt, darauf in Prag mit Petrina persönlich verkehrte und nun erst nach seiner Rückkehr nach Wien aufing, sich selbst mit dem Gegensprechen zu beschäftigen, zu einer Zeit, wo Stark das Relais mit Doppelwindungen bereits in Verwendung hatte.

V. Diese Angaben werden um so glaubhafter und der Umstand, dass Gintl trotzdem als Erfinder des Gegensprechens mit Morse-Apparaten erscheinen konnte, erklärlich, wenn man das sachliche Verständniss der beiden Männer und ihre persönliche Thätigkeit und Stellung berücksichtigt. Petrina, geboren am 24. December 1799, in ärmlichen Verhältnissen aufgewachsen, erst im Alter von 17 Jahren sich den Gymnasialstudien zuwendend, hatte diese und die Universitätsstudien unter Kümmernissen und Entbehrungen mit ungemeinem Fleiss und Eifer vollendet, wurde 1837 als Lehrer der Physik ans Lyceum zu Linz berufen und war seit dieser Zeit unter Anderem auch auf dem Gebiete der Elektricität und des Magnetismus vielfach literarisch thätig; 1844 wurde er Professor der Physik an der Universität zu Prag und bereits 1851 liess er ein Schriftchen über Telegraphie erscheinen unter dem Titel „Elektromagnetischer Telegraph auf den österreichischen Eisenbahnen“. 1852 fand er die Zweigströme bei seiner elektro-magnetischen Harmonika<sup>1)</sup> verwendbar, und im Januar 1853 brachte er einen Aufsatz

1) Vergl. Denkrede S. 14. — Der Schlusssatz des betreffenden Vortrags lässt vermuthen, dass man diese Harmonika als den Stammvater des Telephons, des Phonotelegraphen und elektro-harmonischen Telegraphen anzusehen hat.

über die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien in der Wiener Akademie<sup>1)</sup> zum Vortrag, welcher zu einer sehr beträchtlichen Verminderung der Zahl der Elemente in den Linienbatterien der österreichischen Telegraphenstationen Wien, Verona, Salzburg, Triest und Oderberg führte. Auch über die chemische Telegraphie verbreitete sich Petřina in der Sitzung der böhmischen Gesellschaft vom 30. Mai 1853 und wies durch den Versuch nach, dass man bei ihr mit einem einzigen Grove'schen Elemente auf 100 Meilen weit telegraphiren könne. Im Juli 1853 endlich wies Petřina in einer Mittheilung an die Wiener Akademie<sup>2)</sup> nach, dass bei der Translation an Batteriekraft Nichts erspart werde.

Ganz abgesehen davon, dass sich die Erscheinungen an Gintl's chemischem Gegensprecher ganz ungezwungen nach den Ohm'schen Gesetzen erklären lassen, was eben Petřina 1855 in der schon erwähnten vierten „Mittheilung aus dem Gebiete der Physik“ und 1856 Werner Siemen's in Poggendorff's Annalen (Bd. 98, S. 121) thaten, und dass deshalb diese Erscheinungen und die sämmtlichen von Gintl im 14. Bande der Wiener Sitzungsberichte angeführten Versuche die Coexistenz entgegengesetzt gerichteter Ströme in demselben Leiter zu beweisen nicht genügen, sind bei der von Gintl gewählten Einschaltung der Batterien mit ungleichnamigen Polen an die Linie in dieser gar nicht einmal entgegengesetzte Ströme vorhanden. Darauf weist Petřina auf S. 65 jener vierten Mittheilung hin; auf S. 48 aber hebt er hervor, dass Gintl das Auftreten von Zweigströmen bei der fraglichen Gegensprechtschaltung ganz übersehen zu haben oder (ungerechtfertigter Weise) ausser Beachtung lassen zu wollen scheine.<sup>3)</sup> Dagegen hat Petřina auf S. 66 und 65 jener mehrfach erwähnten vierten Mittheilung klar auf die Folgen der Linienunterbrechungen in dem von Gintl benutzten Doppeltaster hingewiesen und hervorgehoben, dass beim Gegensprechen (mit dem chemischen Telegraphen) die Linienbatterien ebensogut mit gleichnamigen Polen an die Erde gelegt werden könnten, während Gintl<sup>4)</sup> damals die Anlegung entgegengesetzter Batteriepole an die Erde für

1) Vgl. Sitzungsberichte Bd. 10, S. 3, oder Telegraphenvereins-Zeitschrift Bd. 14, S. 200. — Dass man anderwärts schon etwas früher empirisch auf die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien gekommen sei, habe ich auf S. 505 des ersten Bandes meines Handbuchs weiter ausgeführt.

2) Sitzungsberichte Bd. 11, S. 375.

3) Gleiche Schwächen in Bezug auf die Elektrizitätslehre sollen sich überdiess bei Gintl — so wird mir versichert — im persönlichen Umgange hin und wieder bemerkbar gemacht haben. U. A. wird erzählt, Gintl habe bei seiner ersten Rückkehr von Prag ohne Weiteres auf der Linie Wien-Prag mit den gewöhnlichen Morse-Apparaten, in gewöhnlicher Einschaltung, gleichzeitig hin und her telegraphiren wollen und sich gewundert, dass dies nicht ging.

4) Wiener Sitzungsberichte Bd. 14, S. 121. — Vgl. auch Poggendorff's Annalen Bd. 98, S.



nöthig gehalten zu haben scheint; später hat er<sup>1)</sup> auch die Anlegung gleichnamiger Pole an Erde für zulässig erklärt, und so skizzirt Galle auch schon die Einschaltung im Polytechnischen Centralblatte (Jahrg. 1853).

Gesetzt nun, Petřina, dem eine ungewöhnliche Bescheidenheit und Sanftmuth nachgerühmt wird,<sup>2)</sup> habe das Gegensprechen mit Morse-Apparaten erfunden und sich, um es in ähnlicher Weise, wie die Verwendung gemeinschaftlicher Batterien für das österreichische Telegraphenwesen nutzbar zu machen, mit Stark in Verbindung gesetzt, wäre es nicht leicht erklärlich, dass er, nachdem einmal der einflussreiche, mitunter etwas barsch auftretende Telegraphendirector damit bekannt geworden war und die Versuche damit in die Hand genommen hatte, diesem thunlichst freies Spiel liess und als der Veranstalter der Versuche auf der Linie nach aussen hin zugleich als der eigentliche Erfinder angesehen und bezeichnet wurde, durch seinen Vortrag vom 6. November 1854 seine Prioritätsrechte für ausreichend gewahrt erachtete? Ist es doch unter diesen Verhältnissen kaum denkbar, dass Petřina durch diesen Vortrag einen Eingriff in Gintl's Rechte versucht hätte. Zu der Annahme aber, dass Petřina und Gintl dieselbe Aufgabe nach demselben Grundgedanken (Ausgleichung mittels eines Localstromes) unter Benutzung von verschieden eingerichteten Relais und Tastern gelöst habe, finde ich nirgends einen Anhalt.

Weil nun Gintl — der doch den chemischen Schreibtelegraph und Gegensprecher ausführlich zu beschreiben nicht versäumt hat — das Gegensprechen mit Morse-Apparaten selbst nicht beschrieben und vor seiner, ebenfalls nicht durchschlagenden, Entgegnung gegen Frischen auch Nirgends unzweifelhaft als seine Erfindung bezeichnet hat;

weil Gintl nicht nur die „unbefugte“ Veröffentlichung in keiner Weise getadelt hat, sondern auch der von Siemens ausgegangenen öffentlichen Aufforderung gegenüber nicht mit einem Worte für sein gefährdetes Recht eingetreten ist;<sup>3)</sup>

weil Petřina in seinem Vortrage vom 6. November 1854 die zum Gegensprechen benutzbaren Relais und Taster als seine Erfindung bezeichnet hat, worauf seine Wittwe die Ansprüche in ihrem Unterstützungsgesuche gegründet haben kann;

weil ausserdem Petřina sagt, Gintl habe die Gegencorrespondenz in die Praxis eingeführt, und weil dazu eine Aeusserung Gintl's stimmt;

1) Vgl. Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins, Bd. 7, S. 260; Bd. 8, S. 251.

2) Denkrede, S. 4 und 18.

3) Dass Stark nicht auf diese Aufforderung hin für Petřina eingetreten ist, wird Niemand wundern, der diesen friedliebenden Mann persönlich gekannt.

---

weil endlich Petrina's Antheil an der Erfindung durch die Aussagen noch lebender Zeugen verbürgt wird, und weil es innerlich wahrscheinlicher ist, dass Petrina die Erfindung gemacht hat, und dass dieselbe auf Gintl übertragen<sup>1)</sup> wurde, weil unter seinem Schilde die Versuche auf der Linie angestellt wurden,

deshalb glaubte ich mich zu dem Ausspruche<sup>2)</sup> berechtigt:

„Sehr wahrscheinlich verdankt man Petrina auch die Erfindung des Gegensprechens mit Morse-Apparaten.“

Wenn damit die Meinung ausgesprochen ist, dass von Petrina mehr als die bloße geistige Anregung zur Lösung der betreffenden Aufgabe mit Morse-Apparaten ausgegangen ist, so soll damit doch keineswegs das Verdienst geschmälert werden, welches sich Gintl durch verständnisvolle Förderung der Versuche auf der Linie erworben hat. Ebenso bleibt ihm die Erfindung des Gegensprechens mit dem chemischen Schreibapparat. Sollte ich aber in meinem Forschen nach Wahrheit den rechten Weg verfehlt haben, so wird Herr Dr. Gintl gewiss die Freundlichkeit haben, mich auf den rechten Pfad zurückzuleiten.<sup>3)</sup>

---

1) Es konnte dies offenbar leichter und natürlicher geschehen, als z. B. in dem Falle Steinheil-Matzenauer, bezüglich der Translation, welcher in der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieurvereins, Bd. 3, S. 26 und 63; Bd. 12, S. 139 zur Sprache gebracht wird.

2) Handbuch, Bd. 1, S. 546.

3) Um dies Herrn Dr. Gintl zu erleichtern, habe ich demselben einen Abzug der diesen Artikel enthaltenden, im September 1877 erschienenen Nummer des *Journal télégraphique* nach Prag übersandt, bis jetzt aber keinerlei Erwiderung darauf empfangen.

---

## Recensionen.

---

*Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Baldassare Boncompagni. Tomo IX. Roma, Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1876.*

Zu den nicht durch Originalabhandlungen erfüllten Partien dieses Jahrganges möge nur bemerkt werden, dass die Publicationsregister durch stetes Hereinziehen neuer Zeitschriften ihrem hohen Ziele absoluter Vollständigkeit immer näher gebracht worden. Der Bibliograph wird besonders ihretwegen sich freuen, dass soviel Genauigkeit und Kenntniss in der Person eines Herausgebers sich vereinigen, dem auch alle äusserlichen Hilfsmittel in so hervorragendem Grade zur Verfügung stehen. Die einzelnen Artikel sind folgende:

1. *Federigo Napoli, Interno alla vita ed ai lavori di Francesco Maurolico*, S. 1—22.

Maurolycus (geb. am 16. September 1494, gest. am 21. Juli 1575) wird vom Verfasser im Eingang seiner Skizze als ein Mann bezeichnet, der die damals eben entstehende Algebra keineswegs vernachlässigte, dabei aber doch sein Hauptaugenmerk auf die Durchdringung und Weiterbildung der griechischen Mathematik richtete. Aus diesem Grunde war es ihm mehr wie anderen Zeitgenossen um gute Textausgaben der alten Klassiker zu thun, und in einem seiner „Kosmographie“ einverleibten, im Jahre 1862 aber durch Professor Spezi neu herausgegebenen Briefe an Cardinal Bembo setzt er ausführlich Plan und Umfang dieser seiner kritischen Arbeiten aneinander. Ist nun auch diese philologisch-mathematische Thätigkeit die wichtigere, so hat es der gelehrte Sicilianer doch auch andererseits nicht an Originalschriften fehlen lassen. Napoli nennt eine Arithmetik,\* eine Abhandlung von den Polygonalzahlen, Lehrbücher der Perspective, Optik, Musik, Geometrie, Algebra, Sphärik, Astronomie, Sonnenuhrkunde, eine Anweisung zum Gebrauche des Astrolabs, eine

---

\* Von dieser Arithmetik war schon in unserer Recension des 8. Bullettino-Bandes die Rede; vergl. hist.-lit. Abth. Jahrg. XXI, S. 26.

Sinustafel und diverse andere Monographien über mathematische, wie andere Themata. Von diesen Werken galt ein guter Theil für verloren; den Bemühungen unseres Verfassers aber ist es gelungen, auf der Pariser Nationalbibliothek ein ansehnliches Convolut von Handschriften des Maurolycus aufzufinden. — Als Astronom schrieb Jener, abgesehen von der bereits erwähnten Kosmographie, auch über die Bewegung der Sterne; nicht minder gab er bereits die Idee zur Messung eines Meridianbogens, wie sie später von Picard mit so grossem Erfolge praktisch durchgeführt wurde. Den berühmten Stern in der Cassiopeja scheint er zu allererst, noch mehrere Tage vor Tycho Brahe, wahrgenommen zu haben. Ausserdem existirt von ihm ein Handbuch der astronomischen Beobachtungskunst, in welchem er als die damals gebräuchlichen Instrumente das geometrische Quadrat (eine Erfindung Peurbach's), das Astrolab (Plafisphär), die Armillarsphäre und den Himmelsglobus beschreibt. Die Gnomonik zeichnet sich durch eingehende Untersuchungen über die Kegelschnitte aus. Diese letzteren scheinen den Maurolycus überhaupt sehr angezogen zu haben, und so wagte er sogar den Versuch, das vierte Buch der *Κωνικά* von Apollonius zu restituiren. Auch mit der Statistik beschäftigte er sich, und wir ersehen aus seinem posthumen Werke „*De Acquiponderantibus, sive de Momentis aequalibus*“, dass er schon 1548 den Schwerpunkt eines Drehungsparaboloides zu bestimmen im Stande war. Für die Geschichte der Physik interessant sind Maurolycus' Erklärung des Regenbogens, seine Forschungen über Brillen und Linsen, seine Andeutungen über Photometrie und strahlende Wärme. Nicht erwähnt, aber erwähnenswerth ist der Umstand, dass auf ihn die erste correcte Deutung des bekannten, von Aristoteles gröblich missverstandenen Phänomens zurückgeführt werden muss, welchem zufolge die Projection eines durch eine polygonale Oeffnung gehenden Sonnenstrahlenbündels ein einfacher Kreis ist. — Dass ein Mann von so polyhistorischer Bildung daneben noch Zeit hatte, über naturhistorische, logische, dialectische Fragen zu arbeiten, als Kartenzeichner thätig zu sein und die Eruptionen seines Heimathvulkans wissenschaftlich zu verfolgen, wird uns hiernach nicht Wunder nehmen können; hervorzuheben aber ist noch, als für das Zeitalter bezeichnend, die Anekdote, dass sich die Admirale an ihn wandten, um von ihm, als einem berühmten Meteorologen, Aufschluss über die zu erwartende Witterung zu erhalten.

Herr Napoli verdient für seine eingehende Biographie den Dank aller Historiker, die sich für eine der hervorragendsten, wenn auch durchaus nicht genialsten Persönlichkeiten des Jahrhunderts der Renaissance interessiren.

auf tretenden Mathematiker des Namens Heron nämlich theilt er nicht völlig die Ansicht Cantor's, dass dieselben in eine einzige Persönlichkeit zusammenzuziehen seien, und theilt deshalb aus der in des Herrn Herausgebers Besitz befindlichen Originalhandschrift Bernardino Baldi's den Abschnitt „*Herone Mecanico*“ mit, in welchem eine Doppeltheilung des Alexandriner Heron stipulirt wird. Die zweite Zugabe Favaro's behandelt die Vorgeschichte des Verfahrens, dessen sich der Agrimensor Niphus bediente, um rechtwinklige Dreiecke in rationalen Zahlen zu erhalten.

5. M. Cantor, Recension zu: Kuckuck, Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrhundert, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 183—187.

Aus dieser Zeitschrift übersetzt und also deren Lesern bereits bekannt.

6. B. Boncompagni, *Intorno ad un trattato d'aritmetica di Giovanni Widmann di Eger*, S. 188—210.

Unter die wichtigsten Schriftdenkmäler der mathematischen und speciell algebraischen Entwicklungsgeschichte gehört zweifellos Johann Widmann's „Behend und hübsch Rechenung auf allen kauffmannschaften“. Von diesem Buche kennt man ausser der Leipziger Originalausgabe (1489) drei Nachdrucke, einen Pforzheimer von 1508, einen Hagenauer von 1519 und einen Augsburger von 1526. Fürst Boncompagni untersucht mit jener Accuratesse und Bücherkenntniss, wie sie ihm allein eignet, die Verhältnisse dieser vier Auflagen unter sich, indem er dabei den gegenwärtigen Aufenthaltsort jedes Exemplares an giebt. Zum Schluss wird nach Conrad Wimpina Einiges über die Lebensverhältnisse Widmann's mitgetheilt, der in Leipzig studirte und dort mit einem sonst nicht bekannten bayrischen Mathematiker, Magister Altmann von Schmidtmühlen — am Einflusse der Vils in die Naab —, in naher Verbindung gelebt zu haben scheint.

7. F. Brioschi (*Lettera a D. B. Boncompagni*), *Intorno al problema delle tautocrone*, S. 211—216.

Ohrtmann hatte in seiner bekannten Monographie „Das Problem der Tautochronen“ die in den Jahren 1852 und 1853 erschienenen beiden Abhandlungen Brioschi's über diesen Gegenstand, als in einer für ihn unzugänglichen Zeitschrift publicirt, von seiner Berichterstattung ausgeschlossen. Herr Brioschi bestätigt, dass sein damals erzielt Resultat die Entwicklung Lagrange's, an die auch Fontaine und D'Alembert anknüpften, in sich schliesse, nimmt sich jedoch vor, die noch allgemeinere Auffassung, zu welcher er seitdem gelangt, in diesem Briefe darzulegen. Die selbstverständlich höchst elegant geführte Entwicklung enthält als Corollar die vollständige Lösung des Lagrange'schen Originalproblems, die den Tautochronismus bedingende Kraft als Function von Weg und Geschwindigkeit auszudrücken, erledigt aber zugleich eine

allgemeinere Aufgabe, in welcher diejenige von der synchronen Curve als specieller Fall begriffen ist.

8. *Sigismond Günther, Note sur Jean-André de Segner fondateur de la météorologie mathématique*, S. 217—228.

Eine kurze Notiz des Referenten über den vielverdienten und wenig gewürdigten deutschen Gelehrten, welcher zuerst (im Jahre 1733) den Versuch machte, die atmosphärischen Veränderungen rechnerisch durch die Anziehungskraft der Himmelskörper zu erklären. Es wird zu zeigen versucht, worin er das Richtige traf und worin er irrte, Letzteres besonders durch Vergleichung mit den für diese Frage massgebend gewordenen Untersuchungen von Laplace und A. Bouvard.

9. *Ermanno Hankel, Prospetto storico dello sviluppo della geometria moderna, scritto postumo*, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 267—289.

10. *Guglielmo von Zahn, Commemorazione di Ermanno Hankel*, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 290—296.

Diese beiden Uebersetzungen des um die Verbreitung deutscher Wissenschaft in Italien wohlverdienten Dr. Sparagna beziehen sich auf Publikationen, die bei uns Jedermann kennt. Erstere nämlich ist das treffliche historische Eingangscapitel zu seinen von Harnack edirten Vorlesungen über projectivische Geometrie (vgl. Milinowski's Recension in dieser Zeitschrift 21. Jahrg., S. 103 flgg.), der Artikel über Hankel's mathematische Arbeiten aber ist in den „*Mathem. Annalen*“ (7. Band, S. 583 ff.) erstmalig erschienen.

11. *Catalogo dei lavori del Dr. Ermanno Hankel*, S. 301—308.

Dieses mit bekannter Genauigkeit und in der nicht minder bekannten Weise des „*Bullettino*“ angefertigte Verzeichniss zählt 9 selbstständige Schriften (darunter zwei posthume), 16 Artikel in Zeit- und Sammel-schriften (Ersch-Gruber's Encyclopädie) und 4 Recensionen auf.

12. Paul Mansion, Uebersetzung aus dem Deutschen von F. Klein, *Notice sur la vie et les travaux de Louis-Othon Hesse*, S. 309—314.

Die Uebersetzung ist lobenswerth.

13. *M. Curtze, Copernico in Italia*, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 315—319.

In diesem kleinen, aber reichhaltigen Artikel, der zuerst in einer Provinzialzeitung erschien und deshalb nur Wenigen bekannt sein dürfte, berichtet der Verfasser über die neuen für die Copernicus-Forschung äusserst werthvollen Fünde, welche dem Bologneser Malagola gelungen sind. Die dem Familienarchiv der Grafen Malvezzi entnommenen Documente enthalten nämlich die Annalen der germanischen Student-Nation während des Zeitraums von 1200 bis 1650, aus der unbestreitbarer Evidenz hervorgeht, dass Copernicus in







lich sogenannte berühmte Malfatti'sche Problem enthält. Die originale Erledigung wird *in extenso* mitgetheilt und eine kurze Geschichte der späteren Lösungen und Verallgemeinerungen daran geknüpft.

Herrn Biadego sind wir auch für die drei umfänglichen Anhänge zu seiner Biographie zu Dank verpflichtet, von denen zu berichten unsere nunmehrige Pflicht ist.

16. *Catalogo dei lavori di Gianfrancesco Malfatti*, S. 382—387.

Enthält 3 Separatdrucke, 19 Abhandlungen, die im 6. Bande d. „Bullettino“ veröffentlichte Correspondenz mit Lorgna und an ungedruckten Schriftstücken einen „Tractat von den Kegelschnitten und Oertern“ und eine Briefsammlung, welche demnächst zur Sprache kommen wird.

17. *Catalogo di lavori relativi al problema di Malfatti*, S. 388—392.

Eine werthvolle Ergänzung der bekannten Schrift von A. Wittenstein, werthvoll besonders deshalb, weil die Zusammenstellung bis auf die allerneueste Zeit fortgesetzt ist. Trotz seines höchst anerkennenswerthen Fleisses ist jedoch dem Verfasser eine sehr zu beachtende *Piece* entgangen, nämlich der im 55. Bande des „Archiv d. Math. u. Phys.“ abgedruckte, durch antike Strenge ausgezeichnete Aufsatz Mendthals: „Geometrischer Beweis der Steiner'schen Construction zur Lösung des Malfatti'schen Problems“.

18. *Lettere inedite di Gianfrancesco Malfatti*, S. 393—480.

Von den hier mitgetheilten Privatbriefen richten sich 67 an Lorgna, 9 an Tiraboschi, 2 an Galvagni, je einer an Malvezzi und Cagnoli. Gewähren letztere mehr nur ein literarhistorisches Interesse, so ist die wissenschaftliche Bedeutung des Briefwechsels mit Lorgna um so höher zu stellen. Wir heben einige der wichtigsten Stücke aus. Im fünften Briefe widerlegt Malfatti eine der bekannten gewagten Behauptungen Lorgna's, welcher alle Zahlenreihen als durch die Riccati'sche Methode unsummierbar erklärt hatte, deren allgemeines Glied die Form  $\frac{1}{pq}$  habe, ohne dass  $p$  und  $q$  Glieder der nämlichen arithmetischen Progression wären. Dass dies falsch, thut er einfach durch den Hinweis auf folgende Identität dar:

$$\frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 12} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Nr. 11 und 12, welche sich mit Lorgna's geistvoller und doch unrealisierbarer Idee beschäftigen, die Lösung des irreduciblen Falles auf die Integration gewisser Differentialgleichungen zu begründen, sind von Herrn Biadego bereits früher edirt worden; theilweise gilt dies auch von 13 und 14. Aus Brief 16 erfahren wir, dass Giordano Riccati

wichtige Experimente in der Elasticitätslehre angestellt hat und dahin gelangt ist, das Gesetz der mit der Ablenkung wachsenden Elasticität einer gespannten Saite durch eine Hyperbel zwischen ihren Asymptoten darzustellen. Als auffällig ist die aus dem 18. und 19. Briefe hervorgehende Thatsache zu vermerken, dass selbst Leute, wie der eine der Grafen Riccati, die Bedeutung der mathematischen Symbole sich so wenig zu eigen gemacht haben, um  $0.\sqrt{-1}$  für eine von Null abweichende imaginäre Grösse zu erklären! Nicht minder wird für die Geschichte der höheren Analysis Formulirung und Behandlung der das dreizehnte Schreiben erfüllenden Aufgabe Interesse bieten, aus der Gleichung

$$y = \sqrt{2rx - x^2} + r \arcsin \frac{x}{r}$$

heraus  $r$  in die Form  $f(x, y)$  zu bringen. Brief 33 beschäftigt sich mit der Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für drei Ereignisse, für deren Eintritt gewisse günstige Fälle gesetzt sind, „*l'evento medio probabile*“ auszumitteln; Brief 36 lehrt die Construction einer transscendenten Curve, deren Gleichung in den uns geläufigen Polarcoordinaten diese wäre:

$r = \frac{a \sin a \varphi}{a \varphi}$ . Auf ein anderes Gebiet führt Brief 39, in welchem gegen

die von Lambert seiner „Photometrie“ zu Grunde gelegten Hypothesen polemisiert wird. Ein ganz neues Licht auf die Schwierigkeiten und inneren Widersprüche der damals üblichen Reihenlehre wirft der vierzigste Brief. Euler hatte gefunden, dass der convergirenden Reihe

$\frac{1}{4} - \frac{1}{3-4} + \frac{1}{3+4} - \frac{1}{2.3-4} + \dots$  der Werth  $\frac{\pi}{3 \lg \frac{4\pi}{3}}$  entspreche; Mal-

fatti giebt der Reihe durch Zusammenfassung je zweier Glieder die Form

$$-5 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{7.2} + \frac{1}{10.5} + \frac{1}{13.8} + \dots \right)$$

und findet jetzt den Werth  $\infty$ . Er bittet Lorgna, ihm Aufklärung über das gefundene Paradoxon zu verschaffen. Dazu hätte aber jedenfalls eine schärfere Auffassung der Begriffe von Convergenz und Divergenz gehört, als sie Lorgna selbst zu Gebote stand; darüber klärt uns völlig Brief 46 auf, in welchem Malfatti dem Freunde dessen ungenirte Rechnung mit unendlichen Grössen urgirt. Brief 52 enthält die schon berührte, höchst elegante Auflösung des Ottajano-Problems, von dem Pappus lediglich einen Specialfall in Betracht gezogen hatte (vgl. Charles-Sohncke, Geschichte der Geometrie, S. 341). Schliesslich ist noch die in Nr. 67 angeführte Reihe bemerkenswerth, durch welche ganz allgemein jede trinomische Gleichung beliebigen Grades gelöst werden soll.

Die Briefe dienen im Wesentlichen :  
druckes über die Persönlichkeit Ma'

Lectüre der Biographie mit fortgenommen hat. Es liegt vor uns ein stilles, bescheidenes und harmonisches Gelehrtenleben, im engen Kreise einer italienischen Provinzialstadt sich abspielend und doch in stetem Contact mit dem Fluge der gerade damals so plötzlich und hoch sich aufschwingenden Wissenschaft.

19. *Goffredo Friedlein. Necrologia del Dr. Maurizio Cantor*, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 531—535.

Uebertragen aus dieser Zeitschrift 20. Jahrg., Hist.-lit. Abtheil. S. 109 flgg. Beigegeben ist eine Ueberschau sämtlicher erschienenener Nekrologe.

20. *Catalogo dei lavori del Dr. Goffredo Friedlein*, S. 536—553.

10 selbstständige Veröffentlichungen, 53 Zeitschrift-Artikel und Kritiken.

21. *J. J. Abria et J. Hoüel, Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue, Correspondant de l'Institut, Professeur honoraire à la faculté des sciences de Bordeaux*, S. 554—555.

Der wackere Veteran der Zahlentheorie ist am 10. Juni 1875 zu Pau in einem Alter von 83½ Jahren heimgegangen, und zwei seiner Collegen widmen ihm diesen durch die nachher zu nennende Selbstbiographie ergänzten Nachruf. Ursprünglich Soldat, nahm Le Besgue eine Hauslehrerstelle in England und Russland an und lebte dann seit 1830 als Lehrer in verschiedenen Städten Frankreichs, in Nantes, Epinal, Neufschateau. Im Jahre 1838 erhielt er die Professur in Bordeaux, die er bis an sein Ende bekleidete, obschon er dazwischen wieder vielfach seinen eigentlichen Aufenthaltsort wechselte. Seine enorme wissenschaftliche Regsamkeit bethätigte sich fast exclusiv im Gebiete der höheren Zahlentheorie und ebenso ausschliesslich in kurzen Abhandlungen; von grösseren Publikationen sind nur zu erwähnen „*Exercices d'analyse numérique*“ und „*Introduction à la théorie des nombres*“ — letzteres freilich nur ein Torso.

22. *Catalogue des travaux de V. A. Le Besgue*, S. 556—573.

Ausser jenen zwei Büchern und zwei handschriftlich nachgelassenen Arbeiten noch 121 Nummern.

23. *Notice sur les principaux travaux de V. A. Le Besgue, rédigée par lui-même*, S. 574—582.

Der Verfasser beabsichtigte im Jahre 1860, um den Posten eines wirklichen Akademiemitgliedes nachzusuchen, leistete aber mit der ihm eigenen Schüchternheit später auf seinen Plan Verzicht. Die gedrängte Skizze, welche er bei diesem Anlass von seinen wissenschaftlichen Leistungen entwarf, haben wir hier vor uns. — Die aphoristischen Andeutungen über die allerwichtigsten Fragen, so z. B. über die Congruenz  $n^{\text{ten}}$  Grades,



Der zweite Vertreter der um die Geschichte unserer Wissenschaft so hoch verdienten Familie Sédillot ist am 2. December 1875 von hinnen geschieden und sein Bruder widmet ihm einen warmen Nachruf. Als Sohn jenes J. J. Sédillot, bei dessen Tod Alexander v. Humboldt die wahren Worte sprach: „er werde von der Mathematik und von den orientalischen Sprachen gleichmässig betrauert“, am 23. Juni 1808 zu Paris geboren, lehrte er seit einer langen Reihe von Jahren die Geschichte an verschiedenen Collegien seiner Vaterstadt und wandte sich mit Eifer und Erfolg der von seinem Vater cultivirten Specialdisciplin zu. Seine vorzüglichsten Schriften werden aufgezählt; ausserdem wird einiger anderer wichtiger Arbeiten Erwähnung gethan, so der Untersuchung der platonischen Spirale, seiner Uebersetzung der „*Connus géométriques*“ von Hassan ben Haithem u. A. Natürlich ist auch der unerquickliche Streit über eine Stelle des Abul-Wâfa nicht vergessen worden, den Libri provocirte. Der kurze Aufsatz schliesst mit der tief empfundenen Grabrede, welche der zeitige Director des „*Collège de France*“, Laboulaye, einem seiner tüchtigsten Professoren gehalten hat.\*

27. *B. Boncompagni, Catalogo dei lavori di Luigi Amelio Sédillot*, S. 656 bis 700.

Dieser Catalog hat den Vorzug, nebenbei auch noch alle bei Lebzeiten des Verstorbenen publicirten biographischen Artikel über denselben genau anzugeben. Es sind deren neun. Selbst veröffentlicht hat Sédillot 17 Schriften von zum Theile äusserst heterogenem Inhalt und 95 kleinere Abhandlungen für Zeitschriften und akademische Repertorien. Ungedruckt fanden sich in seinem Nachlasse zwei Noten über die von ihm mit so viel Eifer ventilirte Geschichte der dritten Mondungleichheit vor, welche ursprünglich für die Pariser Akademie bestimmt gewesen waren.

28. *Maurizio Cantor, Sulla nazionalità del Copernico*, übersetzt von Alfonso Sparagna, S. 701—716.

Dieser Artikel ist eine von Autor, Uebersetzer und Herausgeber mit Zusätzen versehene Uebersetzung des in der Beilage zur „Allgem. Zeitung“ vom 1. August 1876 veröffentlichten Referates über die neuesten Ergebnisse der Copernicus-Forschung. Es werden sorgfältig die Gründe abgewogen, welche von den Einen für die germanische, von den Anderen für die polnische Abstammung des Reformators geltend gemacht worden sind. Letztere laufen gewöhnlich auf die drei Punkte hinaus, dass der Name Copernic deutlich die slavische Wurzel erkennen lasse, dass sein Vater ein Pole von Nation war und dass seine Vaterstadt (Thorn) unter

\* Es gereicht uns zur Freude, constatiren zu können, dass auf gewisse extreme Doctrinen des verdienten Mannes über die Stellung der Araber zu anderen Völkern gar nicht weiter eingegangen worden ist.



elementarer Darstellung einem grösseren wissenschaftlichen Publikum zum Verständniss zu bringen und hierdurch die Dioptrik des Auges einer genaueren und eingehenderen Behandlung zuzuführen, als solche namentlich ohne Berücksichtigung der Schichtung in der Krystalllinse möglich ist; 2. die Kenntniss über die Brechungsindices der flüssigen Augenmedien sowohl, wie der Häute und Schichten der Krystalllinse durch neue Messungen zu erweitern; 3. die Gewinnung von Integralen zur Bestimmung der Cardinalpunkte eines Systemes von continuirlich-variablen Brechungsindex und ihre Anwendung auf die geschichtete Krystalllinse.

Dem Inhalte entsprechend, zerfällt der Grundriss in zwei Hauptabschnitte: in die Dioptrik geschichteter Linsensysteme (§§ 1—39, S. 1 bis 132) und in die Dioptrik des menschlichen Auges (§§ 40—69, S. 133 bis 276).

Die Dioptrik eines Linsensystemes ist seit Gauss und unter Zugrundelegung der von ihm eingeführten Näherungen Gegenstand zahlreicher Bearbeitungen geworden, wie auch aus dem vom Verfasser am Schlusse seines Buches gegebenen Literaturverzeichnisse hervorgeht,\* und zwar basiren viele derselben theils auf den elementarsten Hilfsmitteln der neueren Geometrie, theils auf elementaren analytisch-geometrischen Methoden. Die letztgenannten, die C. Neumann in seiner bekannten Schrift: „Die Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems“ mit gewohnter Meisterschaft handhabt, hat auch der Verfasser in dem vorliegenden Grundrisse zur Anwendung gebracht, ist aber insofern weiter gegangen als andere Autoren, als er der Entwicklung von Formeln zur Bestimmung der Hauptpunkte und Brennweiten eine viel eingehendere Behandlung angedeihen lässt, als es in elementaren Theorien sonst der Fall zu sein pflegt. Hierin erblicken wir auch den Hauptwerth, welchen der erste Hauptabschnitt gegenüber verschiedenen, der Form nach vielleicht vollkommeneren Darstellungen des Gegenstandes, behaupten darf.

Nach einigen einleitenden Bemerkungen, betreffend die einzuführenden Näherungen, die Gesetze der Brechung und Reflexion, betrachtet der Verfasser zunächst die Brechung an einer Kugelfläche. Diesem ersten Abschnitte, der Grundlage des Folgenden, hätten wir eine übersichtlichere Anordnung und etwas mehr Kürze gewünscht. Unserem Gefühle nach verweilt der Verfasser hier wie auch im folgenden Abschnitte zu lange bei speciellen Fällen und geht in dem Bestreben, immer wieder mit conjugirten Axenpunkten die Darstellungen zu beginnen, etwas zu

---

\* In diesem vermissten wir u. A. das vorzügliche Schriftchen von Prof. Felice Casorati: *Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati*. Milano, Giuseppe Bernardoni, 1872.





asymptotischen Punkte, über die Wirkungen verschiedener Linsenarten und über Aplanatismus und Achromatismus beschliessen den ersten Haupttheil.

Der zweite Haupttheil umfasst mathematische und die Resultate experimenteller Untersuchungen. In letzterer Beziehung trägt der Verfasser ein sehr reiches und werthvolles Material zusammen sowohl aus fremden, wie aus eigenen zahlreichen Bestimmungen der Brechungsexponenten\* der Augenmedien, speciell der Schichten der Krystalllinse des menschlichen Auges, wie auch mehrerer Thieraugen. Der Zunahme der Brechungsexponenten der Schichten gegen den innersten Kern der Linse konnte ein einfaches, allen untersuchten Augen gemeinsames Gesetz angepasst werden: diese Zunahme ist der Entfernung der betreffenden Schichte vom innersten Kerne proportional; diese Proportionalität mit der Entfernung findet auch sehr wahrscheinlich statt für die Krümmungsradien der Schichten, wie der Verfasser aus eigenen Messungen am Ochsenauge und aus Messungen am menschlichen Auge von Treviranus schliesst.

Die mathematischen Untersuchungen enthalten Anwendungen der im ersten Theile gegebenen Formeln auf die Bestimmung der Cardinalpunkte des accomodirten und accomodationslosen Menschenauges unter Voraussetzung einer homogenen Krystalllinse, bei welcher Gelegenheit der Verfasser den Vorschlag macht, das sogenannte reducirte Auge etwas anders als von Listing geschehen zu bestimmen, nämlich den Scheitelpunkt der substituirt brechenden Fläche mit dem ersten Hauptpunkte und ihren Krümmungsmittelpunkt mit dem zweiten Knotenpunkt zusammenfallen zu lassen, was in der That den Anforderungen besser entspricht. Ferner wird die Krümmung der Netzhautbilder untersucht und ihre Uebereinstimmung mit der der Netzhaut nachgewiesen (§ 45) und in § 49 werden jene Punkte im Innern des Auges aufgesucht, dessen Bilder die Haupt- oder die Knotenpunkte sind.\*\*

Sehr ausführlich untersucht der Verfasser das Verhalten der geschichteten Krystalllinse. Zunächst wird ein Näherungsverfahren in Anwendung gebracht (S. 185 und 199), indem die Linse aus 7 Schichten bestehend betrachtet wird; später folgen dann Integralformeln zur Berechnung der Brennweiten und der Orte der Fundamentalpunkte.

Diesen Abschnitten, denen doch, wie aus der Vorrede hervorgeht, besondere Wichtigkeit beigelegt wird, hätten wir eine ausführlichere Begründung gewünscht, denn die Annahmen, die dem Verfahren und

\* Sie wurden ausgeführt an einem grossen Abbe'schen Refractometer.

\*\* Die auf S. 167 gegen Helmholtz gerichtete Bemerkung beruht wohl auf einem Uebersehen, denn es ist in der That, wie schon die Fig. 59 erkennen lässt, der erste Knotenpunkt das Bild des strittigen Punktes  $k_1$  bezüglich der Hornhaut; *allerdings ist  $k_1$  kein reeller Vereinigungspunkt.*



Es ist zunächst wahrzunehmen, dass die Ausdrucksweise eine sorgfältige Durchsicht erfahren hat, sie ist klar und nirgends schleppend; manches Sprachliche wird freilich „im Reiche“ als mehr oder minder berechnete österreichische Eigenthümlichkeit angesehen werden. Die Ausstattung des Buches ist gut, namentlich sind die Abbildungen zu loben wegen ihrer Deutlichkeit und der Vermeidung überflüssiger und verwirrender Nebensachen. Druckfehler sind mässig vorhanden, ein Viertelhundert Berichtigungen bringt die letzte Seite.

Die neueren Arbeiten im Gebiete der niederen, einige auch aus der höheren Geodäsie, sind, mit erkennbarer Vorliebe für die (allerdings zahlreichen) österreichischen, meistens berücksichtigt, entweder nur durch passende Verwerthung ihrer Ergebnisse oder mit dankenswerther Quellenangabe. Ausser vielfachen Abänderungen und kleineren Zusätzen, mit denen man wohl einverstanden sein kann, ist in der vermehrten Ausgabe folgendes, das in der vom Vorworte zur 5. Auflage eingehaltenen Ordnung angegeben wird, neu aufgenommen:

Der Steinheil'sche Heliotrop; Ausführliches über die Genauigkeit der Längenmessungen; die Messräder; der anallatische Distanzmesser von Porro; die Untersuchung über die Excentricität des Höhenkreises; der Theodolith von Breithaupt; die Untersuchung des Fehlers im Höhenwinkel wegen Schiefstehens der Rotationsaxe; das Abstecken langer gerader Linien; das Ausstecken von Kreisbögen; die durch die neue

wenn  $\varphi$ ,  $\alpha$ ,  $x$  beziehungsweise die von einem Fixpunkte auf der Axe (etwa dem Kernpunkte der Linse) gezählten Entfernungen des Brennpunktes, des Hauptpunktes und jener Schichte bedeuten, zu welchen erstere gehören,  $r$  aber den Krümmungsradius der Schichte, positiv gezählt, wenn der Krümmungsmittelpunkt im Sinne der positiven  $x$  der Schichte voraus liegt. Die erste Gleichung kann mit der des Verfassers in Uebereinstimmung gebracht werden, wenn man  $x - \varphi$  sehr gross gegen  $nr$  voraussetzt, was für die Krystalllinse einigermaßen zutrifft. Zählt man die Entfernungen ferner vom Linsencentrum, so wird auch  $x$  gegen  $\varphi$  sehr klein und man hat dann angenähert

$$d \frac{1}{\varphi} = \frac{dn}{nr} \cdot \frac{1}{\varphi} = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dn}{nr} = \int_0^{\delta} \frac{2 dn}{nr},$$

und zwar die zweite Formel im Falle der Accomodation, in welchem für zwei gleichweit vom Mittelpunkte abstehende Schichten die  $r$  gleich und entgegengesetzt werden;  $\delta$  bedeutet die halbe Linsendicke. Die Gleichung zur Bestimmung von  $\alpha$ , also des Hauptpunktes, scheint uns jedoch mit der des Verfassers nicht vereinbar.

Auf S. 264 wird eine Ableitung des Differentialausdruckes für die Brennweite gegeben, die zu unserer Gleichung geführt hätte. Allein erstlich begnügt sich der Verfasser mit einer Näherung und substituirt statt der Entfernung ( $x$ ) des Brennpunktes von der Grenze der Schichte, die Entfernung des Brennpunktes vom Linsencentrum, andererseits wird unrichtiger Weise  $n = 1$  statt  $n = 1 + dn$  in die Gleichung gesetzt, welche bei endlichem Werthe von  $n$  für die Abscissen der conjugirten Punkte gilt.



# Bibliographie

vom 1. December 1877 bis 28. Februar 1878.

---

## Periodische Schriften.

- Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.  
22. Bd., Jahrg. 1877. Göttingen, Dieterich. 28 Mk.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von  
E. SCHÖNFELD & A. WINNECKE. 12. Jahrg. 1877, 3. Heft. Leipzig,  
Engelmann. 1 Mk. 50 Pf.
- Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.  
Mathem.-naturw. Cl. 37. Bd. Wien, Gerold. 55 Mk.
- Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.  
Mathem. - naturw. Cl. 1. Abth., 75 Bd., 4. Heft. Wien, Gerold.  
4 Mk. 40 Pf.
- , 2. Abth., 75. Bd., 5. Heft und 76. Bd., 1. Heft. Ebendas. 6 Mk. 40 Pf.
- , 3. Abth., 75. Bd., 1.—5. Heft. Ebendas. 6 Mk. 40 Pf.
- Mathematische Annalen, herausgegeben von F. KLEIN und A. MAYER.  
13. Bd. (4 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 20 Mk.
- Zeitschrift für mathem. und naturwissensch. Unterricht, herausgegeben  
von V. HOFFMANN. 9. Jahrg. (6 Hefte), 1. Heft. Leipzig, Teubner.  
pro compl. 10 Mk. 80 Pf.
- Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von G. WIEDEMANN.  
Jahrg. 1878. (12 Hefte.) 1. Heft. Leipzig, Barth.  
pro compl. 31 Mk.
- , Beiblätter hierzu. Jahrg. 1878. (12 Hefte.) 1. Heft. Ebendas.  
pro compl. 12 Mk.
- Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik, mathem.  
und astron. Instrumentenkunde. 14. Bd. (6 Hefte), 1. Heft. Mün-  
chen, Oldenbourg. pro compl. 20 Mk.
- Zeitschrift für Meteorologie, redig. von J. HANN. 13. Bd. Nr. 1. Wien,  
Braumüller. pro compl. 10 Mk.
- Repertorium für Meteorologie, redigirt von H. WILD. 5. Bd., 2. Heft.  
Leipzig, Voss. 10 Mk. 50 Pf.

Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. 6. Jahrg., 1. Heft.  
Berlin, Mittler. Halbjährl. 1 Mk. 50 Pf.

*Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica: ed. A. Metzger.*  
27. Jahrg., 1. Heft, Januar-Juni 1877. Göttingen, Vandenhoeck &  
Ruprecht. 1 Mk. 20 Pf.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Geschichte der Wissenschaften in Deutschland. Neuere Zeit. 17. Bd.:  
Geschichte der Mathematik von J. GERHARDT. München, Olden-  
bourg. 4 Mk. 80 Pf.

GÜNTHER, S., Studien zur Geschichte der mathemat. und physikal. Geo-  
graphie. 3. Heft. Halle, Nebert. 2 Mk. 40 Pf.

### Reine Mathematik.

HAGER, G., Ueber die lineare Transformation der Thetafunctionen.  
(Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.

GALLATI, E., Neue Methode der symmetrischen Multiplication und der  
Division mittels Reciproken. Winterthur, Westfeling. 3 Mk. 20 Pf.

STERNECK, R. v., Antilogarithmen (fünfstellig). Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.

WALLENTIN, F., Methodisch geordnete Sammlung von Beispielen und  
Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. und 2. Theil. Wien,  
Gerold. 5 Mk. 60 Pf.

BECKER, J. K., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Theil: Geometrie.  
1. Buch. Berlin, Weidmann. 1 Mk. 60 Pf.

PREDIGER, C., Die Elemente der analyt. Geometrie des Raumes. Claus-  
thal, Löwe. 12 Mk.

SOLIN, J., Ueber Curven dritter Ordnung, welche eine unendlich ferne  
Rückkehrtangente haben, und ihr Auftreten in der Statik. Prag,  
Rziwnatz. 1 Mk. 60 Pf.

GRASSMANN, H., Die lineale Ausdehnungslehre. 2. Aufl. Leipzig,  
O. Wigand. 6 Mk.

ARENDT, G., *Géométrie dans l'espace*. Berlin, Herbig. 2 Mk.

### Angewandte Mathematik.

PELZ, K., Ueber einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes von Pohlke.  
(Akad.) Wien, Gerold. 80 Pf.

LANGER, P., Die Grundprobleme der Mechanik, eine kosmologische  
Skizze. Halle, Nebert. 1 Mk. 80 Pf.

GÖBEL, J. B., Die wichtigsten Sätze der neueren Statik. Zürich,  
Meyer & Zeller. 1 Mk. 60 Pf.

ROSCHATIUS, E., Ueber Bewegungen in  
Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen.

- GRÖBLI, W., Specielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 1 Mk. 60 Pf.
- CLAUSSEN, P., Lehrbuch der mathematischen Geographie. Leipzig, Knapp. 2 Mk.
- BRUNS, H., Die Figur der Erde. Berlin, Schlesier. 4 Mk.
- Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1876. Ebendas. 9 Mk.
- PREUSS, H. W., Nautische Aufgaben. 1. Heft: Breitenbesimmungen. Oldenburg, Schulze. 1 Mk. 60 Pf.
- LOHRMANN, W. G., Mondcharte in 25 Sectionen und 2 Erläuterungstafeln. Herausgegeben von J. SCHMIDT. Leipzig, Barth. 50 Mk.
- MÖLLINGER, O., Neue grosse dritte Himmelskarte mit beweglichem Horizont. 3 Bl. Imp.-Folio. Zürich, Schmidt. 8 Mk.
- GERCKEN, W., Ueber die mathemat. Theorie der Dispersion des Lichts. (Dissert.) Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 80 Pf.
- EICHHORN, A., Bestimmung der Interferenzen von mehreren isochronen und in gleicher Phase schwingenden Lichtcentren. Jena, Fischer. 1 Mk. 20 Pf.
- RÜHLMANN, R., Handbuch der mechanischen Wärmetheorie.. 2. Bd., 1. Lief. Braunschweig, Vieweg. 8 Mk.

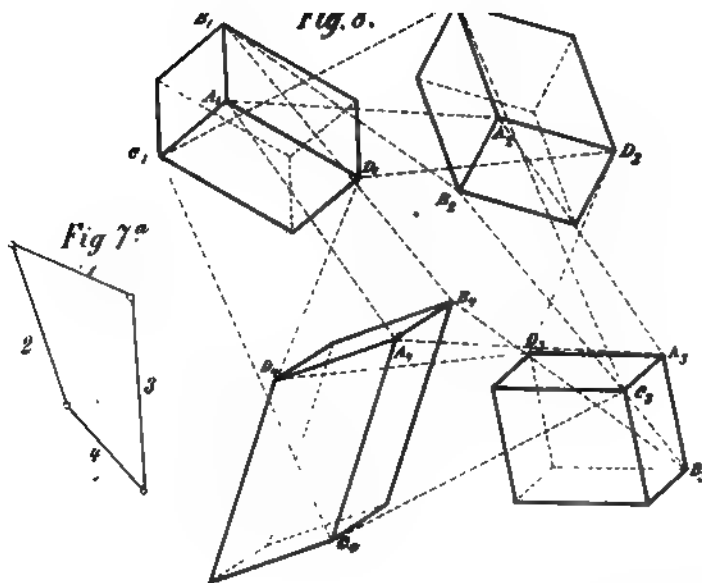
### Physik und Meteorologie.

- LORENZ, L., Die Lehre vom Licht. Vorlesungen. Leipzig, Teubner. 1 Mk.
- BÖRNSTEIN, R., Der Einfluss des Lichtes auf die elektrische Spannung in Metallen. Heidelberg, Winter. 30 Pf.
- HÜFNER, G., Quantitative Spectralanalyse und ein neues Spectrophotometer. Leipzig, Barth. 1 Mk.
- PULUJ, J., Ein Radiometer. (Akad.) Wien, Gerold. 40 Pf.
- MAXWELL, J. C., Theorie der Wärme, übers. von F. NEESEN. 1. Lief. Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 20 Pf.
- HORSTMANN, A., Ueber Verbrennungserscheinungen bei Gasen. Heidelberg, Winter. 80 Pf.



1  
:  
A  
1

1, 2, 3























mal unserer Raumvorstellung ausspricht; aber dieses Merkmal kann nicht in jene bestimmte Form gefasst werden, ohne zuvor von der an sich einfachen Raumvorstellung eine Abstraction auf das erste Constructionselement, den Punkt, gemacht zu haben. Machen wir etwa zunächst die Abstraction auf die Gerade, so haben wir unserem Raume vier Dimensionen zuzuschreiben, während die Axiome der Congruenz (mit den zu Grunde liegenden Thatsachen der sechsfach unendlich vielen freien Bewegungen eines festen Körpers) dabei unverändert erhalten bleiben. Wir wollen mit dieser Bemerkung nur darauf hinweisen, dass eine solche vorherige Abstraction auf den Punkt für das Axiom nothwendig ist, ohne die vielleicht physischen Gründe zu berühren, welche zu einer solchen Abstraction führen und welche auch einer psychologischen Untersuchung bedürfen.

Bevor der Verfasser an die Untersuchung der geometrischen Axiome geht, scheint es ihm nöthig, die logische Vorfrage zu erledigen, ob man unsere Raumvorstellung überhaupt definiren könne, da sie ja als einzigartige Anschauung keinem höheren Begriffe untergeordnet wäre; aber da ihr Inhalt in Begriffe gefasst werden kann, und zwar in Grössenbegriffe, so entsteht keine Schwierigkeit. Man hat nur solcher Grössenbegriffe mehrere aufzufinden, mit welchen sich derjenige unseres Raumes vergleichen lässt.

Diese Möglichkeit der Definition würde sogleich klarer geworden sein, wenn der Verfasser die Thatsache benutzt hätte, dass man denselben Inhalt unserer Raumanschauung auf sehr verschiedene Weise in Begriffe fassen kann. Denn wir haben schon erwähnt, dass man sich den Raum, statt durch continuirliche Bewegung eines Punktes, auch durch Bewegung eines andern Gebildes, etwa einer Geraden, erzeugt vorstellen kann; hierbei ergiebt sich aber offenbar der Grössenbegriff einer durch  $n$  Veränderliche bestimmten — oder specieller einer gleichartig ausgedehnten und congruenten — Mannigfaltigkeit. Ueberhaupt wäre es vortheilhaft, wenn neben den nach Helmholtz gewählten Beispielen der Farben- und Tonreihe als solches unser vierfach ausgedehnter, aus Geraden erzeugter Raum betrachtet würde. Denn eine Reihe von Einwänden, welche gegen diese Beispiele, wegen der Schwierigkeit, Analoga für die Congruenzbedingungen etc zu finden, erhoben worden sind, fallen hier von selbst weg, so vor Allem der Einwand gegen die Möglichkeit einer  $n$ -fach ausgedehnten anschaulichen Mannigfaltigkeit. Ausserdem aber würde diese Auffassung dazu dienen, das, was in unserer Raumvorstellung wirklich enthalten ist, von dem zu trennen, was nur infolge von Definitionen und hinzugetretenen Massbestimmungen in den Axiomen zum Ausdruck gelangt. Denn das Erstere bleibt auch bei unserem Linienraume erhalten, das System von Axiomen aber wird anders geartet. So sieht man z. B., dass man, um den Begriff der Festig-



mittels Bewegung der existirenden festen Körper auf den Raum angewandt wird, wird durch ein analoges ersetzt. Dabei zeigt sich, dass diejenige Eigenschaft des Raumes, welche wir durch den Werth des Krümmungsmasses charakterisiren, in Wirklichkeit nur eine solche unseres Masssystems ist. — Durch diese Darlegung würden mehrere Vortheile erreicht: es zeigt sich vor Allem, dass der Begriff „Richtung“ für sich allein noch nicht das Mass liefern kann, da ja hier die Gerade ohne das gewöhnliche Mass fortexistirt. Es wird aber weiter dadurch eine vielverbreitete Unterschätzung zurückgewiesen, welche hauptsächlich der Grund der falschen Auffassungen und der Angriffe gegen die mathematischen Theorien geworden ist, vor welcher aber schon Helmholtz (S. 38 seines Aufsatzes) gewarnt hat: dass diejenigen Verhältnisse, welche sich nur auf die sinnliche Anschauung krummer Flächen beziehen, auf unsern Raum übertragen werden. Wir haben vielmehr, wenn wir unserm Raume positives oder negatives Krümmungsmass zuschreiben, unsere allgemeine Anschauung in Nichts abzuändern; und auch für einen Beobachter, der sich in einer fictiven vierten Dimension befände, könnte unser Raum dabei als ein ebener Schnitt erscheinen. So wird auch das Dilemma Riemann's verständlich: „Es muss entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.“ Denn da dieselbe stetige Mannigfaltigkeit verschiedener Massverhältnisse fähig ist, so kann der Grund, welcher unsere specielle Massbestimmung bedingt, nicht aus dem Begriffe der Mannigfaltigkeit folgen, sondern nur ein äusserer, etwa ein mechanischer, sein.

Der Verfasser kommt in dem ersten Theile seines Aufsatzes zum Schlusse, dass die drei Axiome: von den drei Dimensionen, von der Congruenz und von der Ebenheit, für unsere Euklidische Geometrie nothwendig und genügend seien. Wir wollen hier auf diesen Schluss nicht näher eingehen, da wir diese ganze Frage noch durchaus nicht für abgeschlossen halten. Denn nach unserer Ansicht müsste das zweite dieser Axiome zunächst kommen, dann ein solches, welches die Zahl 6, von den sechsfach unendlich vielen freien Bewegungen eines festen Körpers herrührend, unter die charakteristischen Merkmale unserer Raumvorstellung aufnimmt, sowie auch diejenigen Zahlen, welche den Untergruppen dieser Bewegungen angehören.

Nach der Feststellung der Voraussetzungen, welche dem Inhalt unserer Raumvorstellungen zu Grunde liegen, gelangt der Verfasser nun zur psychologischen Frage nach den Bedingungen ihrer Entstehung. Während die mathematische Untersuchung von allen philosophischen Annahmen über die Art dieses Ursprungs unabhängig war, nimmt die letztere Untersuchung aus jener wenigstens Anlass zu neuen Fragestellungen, *wenn auch nicht* eigentliche Entscheidungsgründe. Denn in jeden sol-



der heutigen mathematischen Schriften geschieht. Nach dieser **allgemeinen Auffassung** ist Mathematik diejenige Wissenschaft, welche alle Ordnungsbeziehungen, die stetige oder discrete Mannigfaltigkeiten zulassen, entwickelt und die Kriterien untersucht, die diese Beziehungen charakterisiren; ganz unabhängig davon, welche dieser Kriterien bei einer gegebenen Mannigfaltigkeit erfüllt sind. Unter Geometrie versteht man daher jetzt in der Regel (von einzelnen inconsequenten Stellen abgesehen) etwas sehr viel Allgemeineres, als dasjenige System, welches die in unserem Raume vermöge der festen Körper gegebenen Massbeziehungen behandelt; und ebenso giebt es eine allgemeinere Arithmetik, als die gewöhnliche, deren Gegenstand die rationalen und irrationalen Zahlen sind. — Die Frage aber, welches der mathematischen Systeme im gegebenen Falle specielle Anwendung (z. B. speciell-geometrische Verwendung) zu finden hat, liegt über den Grenzen der Mathematik; genug, dass sie die Kriterien darbietet.

Was der Verfasser also von der Geometrie und, wie er bemerkt, von der Mathematik überhaupt aussagt, bezieht sich nur auf die Frage nach denjenigen Systemen, welche für specielle Mannigfaltigkeiten, wie den Raum unserer gewohnten Vorstellung oder das gewöhnliche Zahlengebiet, zur Anwendung zu gelangen haben. Auf die mathematische Wissenschaft überhaupt aber beziehen sich seine Bemerkungen nicht.

Die Theorie ist im Wesentlichen die folgende:

Der Inhalt unserer gewohnten Raumanschauung kann völlig auf eine begrenzte Zahl von Definitionen und Axiomen zurückgeführt werden, die möglichst einfache Abstractionen ihres Gebiets sind, abweichend von den übrigen Wissenschaften, in welchen die Grundbegriffe gerade die schwierigsten und letzten sind. Die Axiome sind nicht nothwendig, allgemein und unveränderlich in absolut rationalistischem Sinne; vielmehr enthalten sie Urtheile über Erfahrungsthatfachen und sind nur relativ nothwendig und allgemein insofern, als sie unsere Anschauungen überall darstellen. Auch die Constructionsbegriffe enthalten empirische Elemente, wenn auch keine neuen, als die schon in den Axiomen ausgesprochenen; sie sind aber keine blossen Abstractionen, sondern auch Modificationen des empirisch Gegebenen, ideale Bilder, deren Conception rein vollzogen werden kann. — Diese letztere Möglichkeit soll nur auf der Gleichartigkeit der Raumelemente beruhen. Wir möchten aber doch den Grund dieser Art von Vorstellungen darin finden, dass die einfachsten Gebilde, Gerade und Ebene, selbst als durch die eine oder andere Art der Construction aus den Raumelementen erhalten gedacht werden. — Endlich sind auch die Axiome der Grössengleichheit empirisch.

Ausser den Grundbegriffen ist auch die Methode für das Wesen der Geometrie charakteristisch. Die Geometrie verfährt einmal (abgesehen von ihren Axiomen) synthetisch, da in jedem geometrischen Lehrsatze









zwölf Jahren bei der Anzeige von *Quételet, Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges* (Zeitschr. Math. Phys. XI, Literaturzeitung S. 29) dahin ausführten, es sei nicht möglich, eine Geschichte der Mathematik in Italien, in Belgien, in Deutschland zu schreiben. Zwischen der Geschichte der Astronomie und der der Mathematik findet aber der engste Zusammenhang statt, so dass kaum ein Name in der ersten zur Geltung gelangt, der nicht auch der zweiten angehört, so dass also auch die gleichen Einflüsse und Abhängigkeiten in der einen, wie in der andern zu Tage treten. Diese Gemeinsamkeit ist es auch, welche uns gestattet, ein Urtheil über eine Geschichte der Astronomie öffentlich auszusprechen, während wir einem theoretisch oder gar einem praktisch astronomischen Werke gegenüber es nicht wagen würden, unsere Laienstimme zu erheben.

Mit dem Urtheil über ein so umfassend angelegtes und zugleich tausend Einzelheiten in sich schliessendes Werk ist es eine eigenthümliche Sache. Man würde offenbar dem Verfasser zu nahe treten, wenn man Quételet's Wort: „eine Stecknadel in einem Bunde Heu aufsuchen zu wollen“, auf sein Werk anwendete und jede kleine im Texte oder in den Anmerkungen zerstreute Notiz sorgsam prüfte, ob nicht ein Irrthum unterlaufen ist. Keinen Irrthum zu begehen, ist kaum der sicher, der nur solche Dinge aufnimmt, welche in allen Geschichtswerken gleichmässig berichtet werden. Wer dagegen überall, wo es ihm möglich ist, auf die Quellen selbst zurückgeht, wem die eigene Auffassung, auf gründlichem Studium beruhend und mit fremden Meinungsäusserungen verglichen, das Vorrecht vor altüberkommenen Berichten besitzt, der wird um so gewisser da und dort eines kleinen Missverständnisses, einer kleinen Uebereilungssünde sich schuldig machen, aber dessen Schriften werden auch den Leser mit dem Bewusstsein erfüllen, Neues gelernt zu haben und darunter unverhältnissmässig mehr Richtiges, als die kleinen unvermeidlichen Mängel betragen. Ein solcher Forscher, wie wir ihn hier schilderten, ist aber Rudolf Wolf. Wir wissen kaum, was wir mehr an ihm bewundern sollen, ob die Geistesarbeit, mit welcher er die Werke der grossen Astronomen aller Zeiten in sich aufzunehmen und dem modernen Leser mundgerecht zu machen wusste, oder die Sammelthätigkeit, welche Einzelschriften über hervorragende Männer oder besonders denkwürdige Ereignisse aufspürte, von deren Vorhandensein kaum Antiquariatskataloge eines Friedländer & Sohn oder eines Gauthier-Villars Kunde geben. Wenn Herr Wolf den unglaublichen Reichthum an biographischen und literarischen Nachweisungen in Poggendorff's Handwörterbuche rühmt, welches er unendlich oft benutzen konnte, so ist Referent mit der Werthschätzung jenes zweibändigen, gegenwärtig jedem Geschichtsforscher auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften unentbehrlichen *Hilfswerkes* völlig einverstanden; aber die Gerechtigkeit verlangt,







dass, wie die zweite Hälfte des Satzes zu verstehen giebt, das einem Kreise eingeschriebene Quadrat genau die Hälfte des demselben Kreise umschriebenen Quadrates bildet, während der ersten Hälfte des Satzes zufolge der Kreis selbst um ein Viertel weniger Fläche einnimmt, als das ihm umschriebene Quadrat. Ueber diesen mit dem Wortlaute nicht ganz übereinstimmenden Sinn lassen aber Commentare und Anwendungen keinen Zweifel zu. Die Fläche des dem Kreise umschriebenen Quadrates ist  $4r^2$ , und wird diese um ein Viertel verringert, so bleibt für die Kreisfläche  $3r^2$ , mithin  $\pi = 3$ . Wieder der babylonische Talmud spricht nun auch den zweiten Satz aus: „Alles, was im Umfange 3 Handbreiten hat, ist 1 Hand breit“ und damit ist das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser oder  $\pi = 3$  wiederholt festgestellt, wenn auch, wie wir schon sagten, der Zusammenhang beider Vorschriften auf den ersten Blick nicht einleuchtet. Den Talmudisten selbst muss wohl, wie bei dem damaligen Zustande griechischer Wissenschaft und dem griechisch-palästinischen Verkehre einleuchtet, das Vorhandensein eines genaueren Werthes für  $\pi$  nicht fremd gewesen sein. Darauf deutet die Frage jenes neugierigen Anonymus (Erubin 14a): Woher leitet man den Satz ab, dass dem Durchmesser 1 der Umfang 3 entspreche? Er erhält zur Antwort: 1. Könige VII, 23. Anknüpfend an dieselbe Stelle, welche die Gestalt des sogenannten ehernen Meeres betrifft, welches 10 Ellen von einem Rande zum andern mass, und eine Schnur 30 Ellen lang war das Mass rings herum, haben wir früher einmal (Zeitschr. Math. Phys. XX, histor.-literar. Abth. S. 163—165) versucht, die gleiche Frage des: „Woher  $\pi = 3$ ?“ zu erörtern und sind zur Wahrscheinlichkeit gelangt, diese Annahme sei altorientalisch, muthmasslich babylonisch. Wir haben dafür auf das Auftreten dieses Näherungswerthes in China, in Griechenland hinweisen dürfen; wir haben später (Zeitschr. Math. Phys. XXII, histor.-literar. Abth. S. 17) den gleichen Werth bei Indern auftreten sehen, was unsere Meinung noch bestärkt. Da wir an dem erst angegebenen Orte (Bd. XX dieser Zeitschrift) uns, wie wir durch briefliche Anfragen erst vor Kurzem erfahren haben, über die eine Art von Anwendung des Werthes  $\pi = 3$  nicht mit hinlänglicher Deutlichkeit ausgedrückt haben, so sei gestattet, hier darauf zurückzukommen. Aus den Abmessungen des ehernen Meeres, zusammengehalten mit den 2000 Bath, welche hineingegangen sein sollen, zogen wir damals den Schluss, den Verfertignern des ehernen Meeres habe die Formel  $\frac{4}{3}\pi r^3$  für den Kugelinhalt unter Annahme von  $\pi = 3$  gedient. Wir meinten natürlich nicht, dass jene Formel als solche bekannt war; sie war es so wenig, wie die  $2\pi r$  für den Kreisumfang, wie  $\pi r^2$  für die Kreisfläche! Aber wir meinten, man habe den Kugelinhalt berechnet als  $4r^3$  oder, was vielleicht noch deutlicher ist, als  $\frac{1}{2} \cdot (2r)^3$ . Mit anderen Worten: Der Kreisumfang galt für das Dreifache des Durchmessers, die Kreisfläche für drei Viertel des



rechteckes bezeichnet, da ausserdem  $l - 2x$  die Seite des inneren Quadrates bildet, in welches die fünfte Samengattung in selbst quadratischer Form eingesät werden soll, so ist die Function, welche zu einem Maximum werden soll,

$$f(x) = 4(l - 2x) \cdot x + \frac{1}{2}(l - 2x)^2 = \frac{l^2}{2} + 2lx - 6x^2.$$

Demnach ist  $f'(x) = -12x + 2l$ ,  $f''(x) = -12$ . Ein Maximum entsteht also bei  $x = \frac{l}{6}$ , woraus die Construction leicht folgt. Genau eben diese

Construction lehrte aber Maimonides (1135 – 1204). Freilich giebt er keinerlei Auskunft darüber, wie er zu seiner Construction gekommen sei und welchen Zweck er dabei im Auge habe. Vielleicht mochten ihm gewisse elementare Betrachtungen des relativen Werthes dieser und anderer Zerfällungen des ursprünglichen Feldes in Beete dienen, wie sie auch Herr Zuckermann S. 15 – 16 benutzt.

CANTOR.

**Der Thibaut'sche Beweis für das elfte Axiom**, historisch und kritisch erörtert von Prof. Dr. S. GÜNTHER. Programm zur Schlussfeier des Jahres 1876 – 77 an der königl. Studienanstalt zu Ansbach.

Seit Euklid die erste uns erhaltene Parallelentheorie auf eine Forderung stützte, welche bei jedem Leser den Zweifel wach rufen musste, ob denn diese Forderung auch zu erfüllen sei, sind mehr als zwei Jahrtausende verflossen. Jener Zweifel, den wir als naturgemäss bezeichnen, liess nicht lange auf sich warten. Schon Claudius Ptolemäus, der grosse alexandrinische Astronom, schrieb eine besondere Schrift über das sogenannte elfte Axiom, welche uns allerdings verloren gegangen ist, deren Hauptinhalt aber von Proklus in seinem Commentar zu den euklidischen Elementen aufbewahrt wurde. Das einmal gegebene Beispiel fand Nachahmung zu den verschiedensten Zeiten, und wenn wir nur auf das XIX. Jahrhundert uns beschränken wollten, so wäre es eine zum Erschrecken stattliche Anzahl von Versuchen, die Parallelentheorie auf festem Grunde aufzubauen, welche uns begegnen würde. Herr Günther hat aus den vielen sogenannten Beweisen des elften Axioms einen hervorgehoben, der es nach mancherlei Richtung verdiente, geschichtlich verfolgt und mit prüfendem Blicke nach seinen Schwächen untersucht zu werden. Es ist das der Beweis, den Thibaut seit dem Anfange unseres Jahrhunderts in seinen von Hunderten von Zuhörern besuchten Vorlesungen lehrte und in seinem „Grundrisse der reinen Mathematik“ niedergelegt hat, jener Beweis, welcher zunächst die Winkelsumme des Dreiecks zu zwei Rechten vermöge einer in drei Acten mit zwischenliegender Translation vollzogenen vollen Rotation begründet und von













**Ergebnisse physikalischer Forschung**, bearbeitet von Dr. C. BOHN, Professor der Physik an der Forstlehranstalt Aschaffenburg. I. Lief.

Der Verfasser des Werkes, von dem erst etwa der dritte Theil erschienen ist, beabsichtigt nach einem ausgegebenen Prospect, hauptsächlich den Bedürfnissen Derer zu genügen, die sich auf Prüfungen aus der Physik vorbereiten wollen; er denkt sich dasselbe aber auch als kurzes Handbuch zum Nachschlagen, als Mittel zur Repetition und als Leitfaden zu Vorlesungen. „Ausführlichkeit oder gar Vollständigkeit der Tabellen ist nicht beabsichtigt, sondern nur Auswahl des Wichtigsten und zuerst Nöthigen.“ Die erste Lieferung enthält: Allgemeines über Körper und Kräfte, allgemeine Mechanik und Schwere, physikalische Mechanik, Wärmelehre (erster Theil).

Nach dem Titel könnte man eine Sammlung von Formeln und Zahlenwerthen erwarten; so trocken hat der Verfasser den Inhalt nicht geben wollen, er hat noch den Zusammenhang der Resultate kurz, aber vollkommen genügend dargestellt. Ob das Werk zur Vorbereitung für Prüfungen ausreicht, wird wohl bezweifelt werden dürfen; mit dem Satze, dass z. B. „künftige Lehrer nicht oder nur selten und stets in zweiter Linie bei der Prüfung nach den Mitteln und Wegen der Forschung gefragt werden“, wird nicht Jedermann einverstanden sein. Als Nachschlagebuch dagegen in allen obengenannten Fällen, für Studirende, für Candidaten und Lehrer, scheint es seinem Zwecke vollkommen zu entsprechen; doch ist zu bedauern, dass, wie oben angeführt, Vollständigkeit der Tabellen nicht beabsichtigt ist; es würde dadurch sicher sehr an Brauchbarkeit gewinnen. Bei einzelnen Zahlenangaben, z. B. über specifische Wärme, Ausdehnung durch Wärme u. s. w., wäre es von Interesse, die Autorität zu erfahren, die Originalzahlen nebst Angabe des Namens des Autors. Das in Beziehung auf Brauchbarkeit für den Lehrer und Studirenden der Physik bei Weitem in erster Linie stehende Werk von Mousson (dem nur leider ein Register fehlt) ist hierin Muster und scheint auch von dem Verfasser benützt zu sein. Warum dann nicht noch die Namen beisetzen, die neben den Zahlen stehen? Vielleicht würde ein Bogen mehr nöthig geworden sein, aber die Zahl der Abnehmer wäre gewiss eine grössere.

Im Einzelnen lässt sich nur wenig aussetzen, die Definitionen und Erklärungen sind scharf und erschöpfend. Nur in § 26 ist von einem nach dem Erdmittelpunkte gerichteten senkrechten Zuge die Rede (was senkrecht zur Erdoberfläche ist, geht nicht durch den Erdmittelpunkt, vergl. § 70); in § 62 wird gesagt, alle Körper seien gleich schwer, was die Anmerkung indirect verneint; in § 67 ist die kühne Behauptung aufgestellt, die Bestimmung einer Mittelkraft sei nur durch eine in vielen Fällen gar nicht ausführbare Rechnung möglich! und in etlichen Fällen *ist der Text für die Figur zu mager*, so dass die letzte unverständlich





**Angewandte Mathematik.**

- Publication des königl. preussischen geodätischen Instituts: Das rheinische Dreiecksnetz. 2. Heft: Die Richtungsbeobachtungen. Berlin, Schlesier. 15 Mk.
- LISTING, J., Neue geometrische und dynamische Constanten des Erdkörpers. Göttingen, Dieterich. 1 Mk.
- HEIS, E., *Atlas coelestis eclipticus. Octo continens tabulas ad delineandum lumen zodiacale.* Cöln, Du Mont-Schauberg. 6 Mk.
- VOGEL, H., Der Sternhaufen  $\gamma$  Persei, beobachtet am achtzölligen Refractor der Leipziger Sternwarte in d. Jahren 1867—1870. Leipzig, Engelmann. 2 Mk. 40 Pf.
- AUWERS, A., Bericht über die Beobachtung des Venusdurchganges vom 8. December 1874 in Luxor. Berlin, Dümmler. 13 Mk.
- BOLTZMANN, L., Ueber die Beziehung zwischen dem 2. Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, resp. den Sätzen über das Wärmegleichgewicht. (Akad.) Wien, Gerold. 90 Pf.

**Physik und Meteorologie.**

- MAXWELL, C., Theorie der Wärme, übers. v. F. NÆSEN. 2. Lief. (Schluss.) Braunschweig, Vieweg. 3 Mk. 20 Pf.
- BEETZ, W. v., Grundzüge der Elektrizitätslehre. 10 Vorlesungen. Stuttgart, Meyer & Zeller. 3 Mk. 60 Pf.
- EXNER, F. und GOLDSCHMIEDT, Ueber den Einfluss der Temperatur auf das galvanische Leistungsvermögen der Flüssigkeiten. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Mk. 20 Pf.
- TROOST, B., Nachweis der Unzulänglichkeit der Kirchhoff'schen Erklärung der dunklen Fraunhofer'schen Linien im Sonnenspectrum. Leipzig, Georgi. 1 Mk. 25 Pf.
- WITTE, E., Ueber Meeresströmungen. Pless i. O.-S., Krummer. 2 Mk.















196. Théorèmes sur les coniques. Van Aubel. N. corresp. math. III, 211.  
 197. Question sur les doubles systèmes de coniques orthogonales. Breton. N. corresp. math. III, 270.  
 Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

**Kettenbrüche.**

198. Beweis des Euler'schen Bildungsgesetzes für die Näherungswerte von Kettenbrüchen. Schlegel. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 402.  
 199. Neue Methode der directen Summation periodischer Kettenbrüche. S. Günther. Zeitschr. Math. Phys. XXII, 31.

**Kreis.**

200. Ueber den Feuerbach'schen Kreis. Hain. Grun. Archiv LIX, 323.  
 201. Beiträge zur Lösung einiger bekannten geometrischen Aufgaben. Mendthal. Grun. Archiv LIX, 39.  
 202. Propriété des tangentes à une circonférence dont le centre est le centre des moyennes distances de points donnés. Freson. N. corresp. math. III, 55.  
 203. Trouver une circonférence qui rencontre cinq droites données, parallèles, et non situées dans un même plan. Van Aubel. N. corresp. math. III, 49.  
 204. Trouver, géométriquement, l'enveloppe des droites qui donnent des cordes égales dans deux cercles donnés. Laisant. N. corresp. math. III, 356.  
 205. Gegeben zwei Kreise, dem einen soll ein Dreieck so umschrieben werden, dass es dem andern eingeschrieben ist. Liebrecht. Grun. Archiv LIX, 445.  
 206. Sur trois circonférences tangentes au même point. Jamet. N. corresp. math. III, 253.  
 207. Démontrer que les sommets de trois triangles dont les bases passent chacune par un point d'une de trois circonférences et par leur centre radical sont situés sur une même ligne droite. Dubois. N. corresp. math. III, 395.  
 — Van Aubel ibid 425.  
 208. Somme des puissances de trois cercles. Dubois. N. corresp. math. III, 394.  
 209. Sur les cercles tangents à trois cercles donnés. Dubois. N. corresp. math. III, 381.  
 Vergl. Hyperbel 176, 177. Kegelschnitte 194. Parabel 278, 279.

**Krümmung.**

210. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. Lipschitz. Compt. rend. LXXXII, 160, 218.  
 Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 4. Ellipsoid. Maxima und Minima. Oberflächen 262.

**Kugel.**

211. Sphère sur laquelle se trouvent huit points situés sur les faces d'un octaèdre. Freson. N. corresp. math. III, 89. — E. Lucas ibid 210.  
 212. On the shadows of plane curves on spheres. Jeffery. Quart. Journ. math. XIV, 53.  
 Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 24. Complation 48. Elliptische Transcendenten 101.

**Kugelfunctionen.**

213. Sur quelques théorèmes publiés par Mr. Laurent. Heine. Journ. mathém. Sér. 3, II, 155. — Darboux ibid. 240. — Laurent ibid. 420. [Vergl. Bd. XXII, Nr. 159.]

**M.****Magnetismus.**

214. Sur la constitution intérieure des aimants. Jamin. Compt. rend. LXXXII, 19.  
 215. Solution analytique du problème de la distribution dans un aimant. Jamin. Compt. rend. LXXXII, 783.  
 216. Sur la théorie du contact d'épreuve. Bouty. Compt. rend. LXXXII, 836.  
 217. Sur la distribution du magnétisme dans les barreaux cylindriques. Bouty. Compt. rend. LXXXII, 1050.

**Mannigfaltigkeiten.**

218. Sur l'étendue à  $n$  dimensions. Catalan. N. corresp. math. III, 114.

**Maxima und Minima.**

219. Déterminer le maximum et le minimum de la corde commune à une ellipse et à son cercle de courbure. Fleureau. N. corresp. math. III, 392.  
 Achen 256.











Fig. 1.

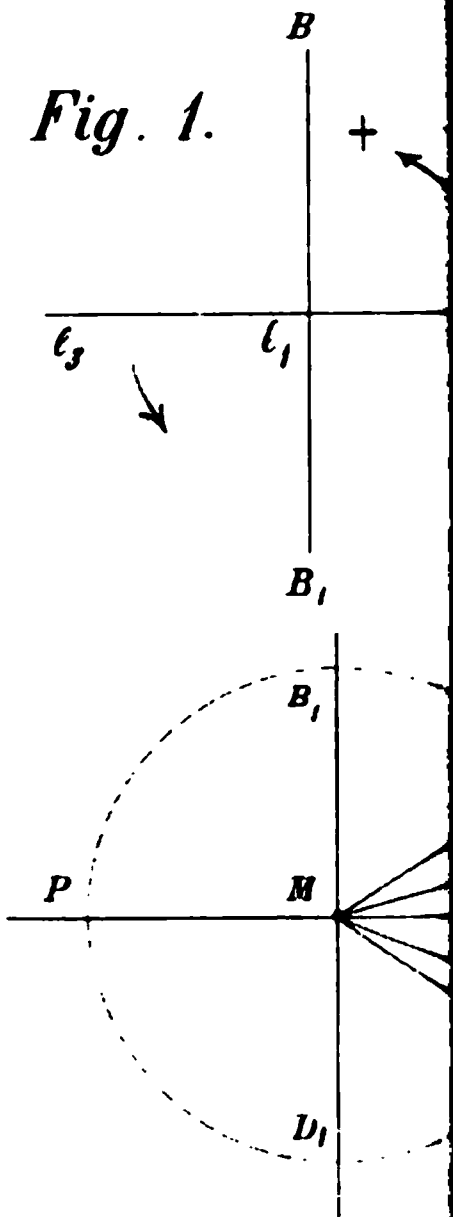


Fig. 8.

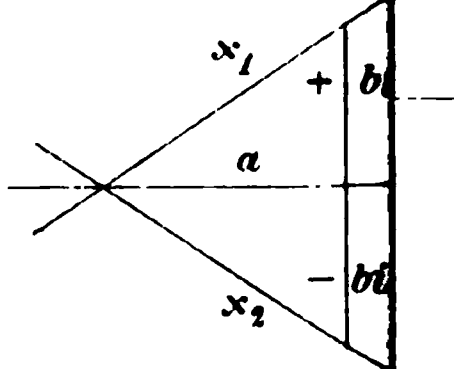


Fig. 16.

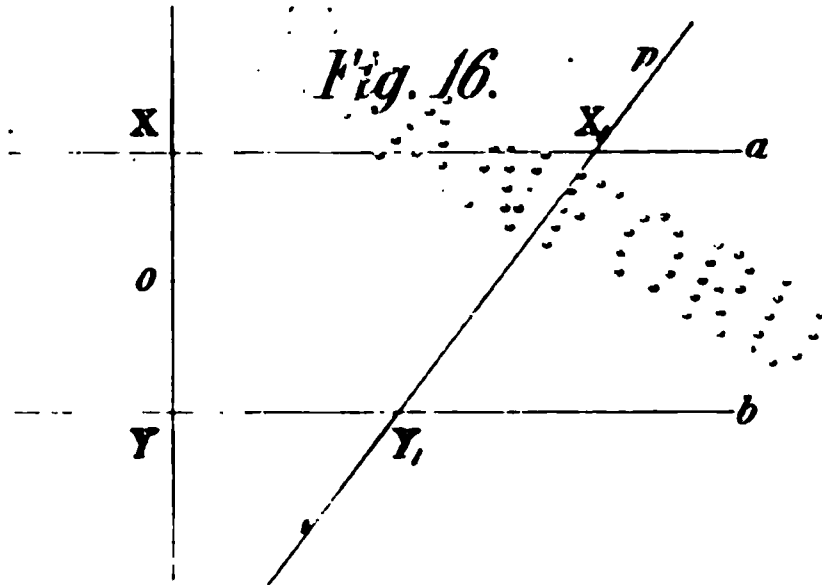


Fig. 15.  $B_{\infty}$

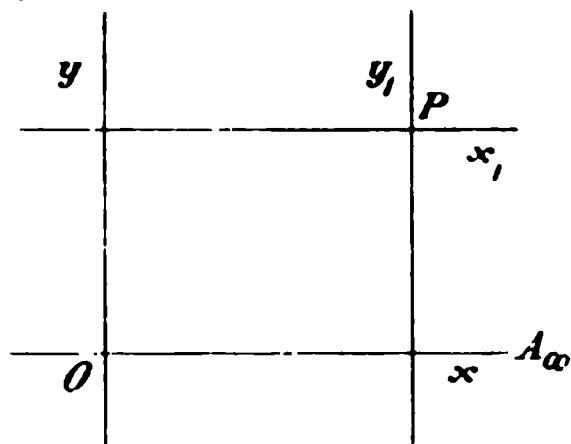


Fig. 10.

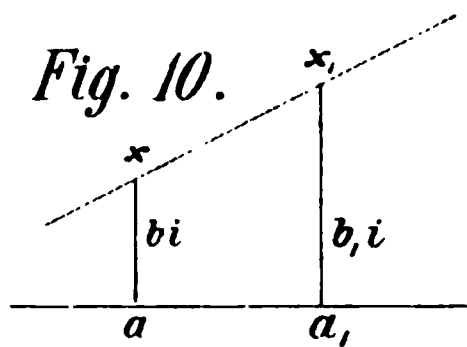
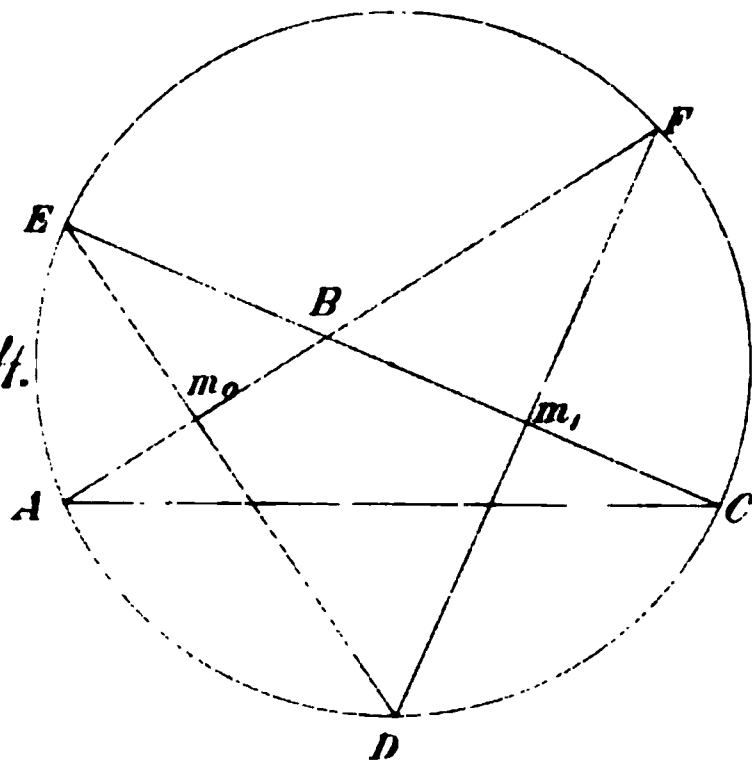
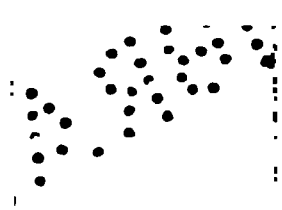


Fig. 14.





1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100

1

2

3

4



Dass Pappus den 18. Satz im Buche Archimedes' *περὶ ἐλίκων* meint, erhellt deutlich aus S. 272: *μηδενὶ γὰρ προσχρόμενον στερεῷ δυνατόν εὐρεῖν τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον θεώρημα, λέγω δὴ τὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ κύκλου ἴσην ἀποδείξαι τῇ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένην εὐθείᾳ τῇ ἐκ τῆς γενέσεως ἕως τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἑλικος*, und ist auch von Hultsch angenommen worden. Der 18. Satz bei Archimedes S. 235 flgg., ed. Torelli (Oxon. 1792 fol.) lautet: *αἱ καὶ τᾶς ἑλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύη κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἑλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαιμείου, ὃ ἐστὶν ἀρχά (so die Handschriften) τᾶς ἑλικος ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἡ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψανούσῃ, καὶ ἡ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψανούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἑλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ*. Der Beweis wird indirect geführt und stützt sich (S. 236, 30 flgg.) auf *prop.* 7 und (S. 237, 15 flgg.) auf *prop.* 8. Beide Sätze führen auf quadratische Gleichungen, wie schon Nizze in seiner trefflichen Uebersetzung S. 122 und 124 bewiesen hat. Es kann kaum zweifelhaft sein, dass Pappus unter seiner *στερεὰ νεύσις πρὸς τὸν κύκλον* die zweite (*prop.* 8) verstand. Der achte Satz (S. 224 flg.) geht darauf hinaus, in einem gegebenen Zirkel *ACD* (Fig. 1) eine Linie aus dem Centrum (*KJ*) zur Tangente *LX* im Endpunkte der gegebenen Linie *AC* so zu legen, dass *BE: CJ* ein gegebenes Verhältniss hat. Im Beweise (S. 224 am Ende) postulirt Archimedes, es sei möglich, im Zirkel *KML* zwischen der Peripherie und der gegebenen Linie *LX* eine der *CM* gleiche Linie *JN* so zu legen, dass sie hinlänglich verlängert den Punkt *K* treffe (*νεύουσαν ἐπὶ τὸ K*, S. 225, 1). Die Lösung dieser *νεύσις*, auf der also wirklich der 18. Satz, wie er behauptet, beruht, wollte, glaube ich, Pappus geben S. 298: *τῆς ὑπὸ Ἀρχιμήδους ἐν τῷ περὶ ἐλίκων βιβλίῳ λαμβανομένης νεύσεως τὴν ἀνάλυσιν σοι κατέταξα, ἵνα τὸ βιβλίον διερχόμενος μὴ διαπορῇς* (weil A. selbst die Lösung dieses Problems nicht mittheilt, sondern nur die Möglichkeit postulirt). *λαμβάνονται δὲ εἰς αὐτὴν οἱ ὑπογεγραμμένοι τόποι καὶ πρὸς ἄλλα πολλὰ τῶν στερεῶν προβλημάτων χρήσιμοι*. Er führt demnächst folgende zwei Hilfssätze an und beweist sie (man vergl. die Erläuterungen bei Hultsch):

1. Wenn eine Linie *AB* und ein Punkt *C* gegeben ist, und aus *C* eine Linie *DC* nach *AB* gezogen und in *D* eine Perpendiculaire *DE* aufgerichtet wird, dann wird der Punkt *E* auf einer Hyperbel liegen, wenn das Verhältniss *CD: DE* gegeben ist. (Fig. 2.)

2. Wenn eine Linie *AB* gegeben ist und auf sie die Perpendiculaire *CD* hinabgefällt wird, dann wird der Punkt *D* auf einer Parabel liegen, wenn *AC × CB* dem Producte der *CD* und einer gegebenen Linie gleich ist. (Fig. 3.)

Wie Pappus diese beiden Sätze zur Lösung des Archimedischen Problems angewendet hat, kann mit ziemlicher Sicherheit aus dem vor-









welche zur Bestimmung der sogenannten Abel'schen Functionen im engeren Sinne dient, glauben wir den Grund der Vereinfachungen zu erblicken, welche dieser specielle Fall dem allgemeinen gegenüber zulässt. Denn indem man die der Functionenklasse zu Grunde liegende algebraische Gleichung zwischen zwei Variabeln von vornherein in einer Form annimmt, in der die Abel'schen Functionen sich leicht bestimmen lassen, macht man (wenigstens in dem Falle  $p=3$ ) eine Annahme, zu der genau dieselbe Berechtigung vorliegt, wie dazu, die Function unter dem Wurzelzeichen bei den hyperelliptischen oder den hier behandelten Integralen in ihre linearen Factoren zerlegt anzunehmen.

Sehen wir nun zu, in welcher Weise der Verfasser die Hauptaufgaben der Theorie in Angriff genommen hat. Bezeichnet man mit  $u_1$  die Normalintegrale erster Gattung und setzt

$$v_1 = \sum_{1,p}' u_1(s_v, z_v),$$

so sind dadurch die von einander unabhängigen oberen Grenzen  $(s_v, z_v)$  als  $2p$ -fach periodische Functionen der  $p$  Veränderlichen  $v_1$  bestimmt und es ergeben sich hieraus zwei Aufgaben: erstens diese oberen Grenzen oder symmetrische Functionen derselben durch Thetafunctionen der Variabeln  $v_1$  darzustellen, sodann umgekehrt, gegebene  $2p$ -fach periodische Thetaquotienten algebraisch durch  $s_v, z_v$  auszudrücken. Das erste Problem ist das Jacobi'sche Umkehrproblem, das zweite kann man das Riemann'sche nennen. Summen von mehr als  $p$  Integralen dieser Art zu betrachten, erweitert principiell die Aufgabe nicht, da mittelst des Abel'schen Theorems jedes System von solchen Summen auf eines mit  $p$  gliedrigen Summen zurückgeführt werden kann, in welchem überdies die unteren Grenzen beliebig gegeben sind. Dass Riemann Summen betrachtet, die ein Glied mehr enthalten (Riemann's Werke S. 134), ist durch seine Methode geboten und man kann schliesslich einer der oberen Grenzen einen beliebigen speciellen Werth ertheilen, ohne dass dadurch die Allgemeinheit der betrachteten  $2p$ -fach periodischen Functionen geschmälert würde. In ihrer Allgemeinheit gefasst, sind freilich die beiden oben angegebenen Probleme nicht wesentlich verschieden, allein es trifft sich nicht immer, dass die einfachsten Fälle der Lösung des Riemann'schen Problems schon zur Lösung des Jacobi'schen Problems ausreichen und es ist daher eine Hauptaufgabe der Theorie, die Lösung des Riemann'schen Problems, dessen vollständige Lösung auf stets höhere und höhere algebraische Gleichungen führen würde, soweit zu fördern, dass die Lösung des Jacobi'schen Problems daraus geschöpft werden kann.

Im Allgemeinen ist der einfachste Fall des Riemann'schen Problems der, in dem sich die Argumente der Thetafunctionen, deren Quotienten algebraisch bestimmt werden sollen, um halbe Periodensysteme



Alle Integrale zweiter Gattung lassen sich mit Zuziehung von solchen der ersten Gattung und von algebraischen Functionen linear durch  $p$  specielle unter ihnen, die in beliebig gegebenen Punkten, etwa in Verzweigungspunkten, unendlich werden, darstellen, so dass diese Functionen nicht von einem Parameter in transcenderter Weise abhängen, während ein solcher in den Integralen dritter Gattung nothwendig vorkommt. Im ersten Theile hat der Verfasser die Darstellung dieser Functionen als algebraische Integrale gegeben. Um die Theorie derselben zu erledigen, ist es erforderlich, Summen von  $p$  gleichartigen Integralen dieser Art mit unabhängig veränderlichen oberen Grenzen als eindeutige Functionen der entsprechenden Integralsummen erster Gattung durch die logarithmischen Ableitungen der Thetafunctionen darzustellen. Diese Aufgabe ist in den §§ 25 bis 30 gelöst. Die umgekehrte Aufgabe, die Darstellung der logarithmischen Ableitungen der Thetafunctionen durch algebraische Integrale und algebraische Functionen, ist in § 32 angedeutet und mag bei der Durchführung noch erhebliche Schwierigkeiten haben.

Den Schluss der ganzen Arbeit bildet eine interessante Untersuchung, welche die Bestimmung des Werthes von  $\vartheta(0, \dots 0)$  durch die Moduln (die Verzweigungswerthe) zum Zwecke hat, mittelst einer Methode, welche der Verfasser schon früher mit Erfolg auf die hyperelliptischen Functionen angewendet hat. Die Methode ist von Riemann angedeutet und ist die Verallgemeinerung der von Jacobi zu gleichem Zwecke bei den elliptischen Functionen benutzten. Sie beruht auf der Darstellung des Differentials  $d \lg \vartheta(0, \dots 0)$  durch die unabhängigen Veränderlichen  $k_1, k_2, \dots k_{p+2}$ , welches in dieser Form die Integration gestattet.

Königsberg, im September 1877.

H. WEBER.

---

**Handbuch der elektrischen Telegraphie.** Unter Mitwirkung mehrerer Fachmänner herausgegeben von Dr. K. E. ZETZSCHE, Professor der Telegraphie am Polytechnikum zu Dresden. Erster Band: Geschichte der elektrischen Telegraphie. 8<sup>o</sup>, mit 335 in den Text gedruckten Holzschnitten. 1877. Berlin, Julius Springer. Preis 18 Mark.

Das uns vorliegende Werk, dessen Verfasser längst als Autorität auf dem Gebiete der Telegraphie bekannt ist, zeichnet sich vor allen anderen Lehrbüchern vornehmlich dadurch aus, dass die Anordnung des reichhaltigen Stoffes eine ganz neue ist. Gerade diese Fülle des Stoffes jedoch machte es für den Einzelnen fast unmöglich, das Ganze allein zu bearbeiten. Aus diesem Grunde hat der Herr Verfasser vorgezogen, sein Werk in vier von einander unabhängigen Bänden, deren jeder ein für sich abgeschlossenes Ganzes bildet, erscheinen zu lassen, wobei die Hilfe

















Auch die Ausführungen der §§ 23 und 29, in welchen der Verfasser sich darüber verbreitet, inwieweit das wirkliche Gewölbe mit dem früher vorausgesetzten Körpersystem übereinstimmt, halten wir keineswegs für überall zutreffend. Der Verfasser selbst giebt zu, dass ein in den Fugen durch Cement gebundenes und sonst angemessen behandeltes Gewölbe nicht nach seiner Theorie beurtheilt werden kann. Für ein nur auf Druck und Schub beanspruchtes Gewölbe lässt sich aber der zwischen Cementverband und Mörtelverband etablirte Unterschied schwerlich aufrecht erhalten.

In Bezug auf das Aeussere des Buches ist zu bemerken, dass weder ein Inhaltsverzeichniss, noch Capitelüberschriften die Orientirung erleichtern, ja sogar die Jahreszahl des Erscheinens fehlt. Trotz Allem müssen wir anerkennen, dass viel Fleiss und Liebe auf das Werkchen verwendet worden ist. Wir würden uns freuen, wenn es dem Verfasser gelingen sollte, aus dem vorgeführten Guten im Verein mit neuen Gedanken ein einheitliches Ganzes zu schaffen.

Stuttgart.

WEYRAUCH.

### Von den Elementen und Grundgebilden der synthetischen Geometrie.

Versuch einer Erweiterung der Lehre von den Formen unserer Raumanschauung, von K. RUDEL, Rector der königl. Gewerbeschule in Bamberg. Bamberg 1877.

Vorliegendes Schriftchen, 24 Seiten lang, hat den Zweck, den Nachweis zu liefern, dass unsere Anschauungsform nicht die einzige, die höchste und letzte sein wird, dass die Möglichkeit der Anschauungsformen unbegrenzt, ja dass die Erscheinungswelt höchst wahrscheinlich weit über den Kreis unserer Anschauungsform hinausgeht; es geht davon aus, dass unser Raumbegriff lediglich eine durch unsere Existenz als Raumtheile bedingte Anschauungsform ist. — Die beiden Theile, in welche es zerfällt, haben die Ueberschrift: „Betrachtungen vom Standpunkte gewöhnlicher Raumanschauung aus“ (S. 5 — 12) und „Betrachtungen vom Standpunkte einer höheren Form der Raumanschauung aus“ (S. 15 — 26). Der erste Theil bespricht in durchaus bekannter Art die Grundgebilde der synthetischen Geometrie; er theilt sie in Grundgebilde der ersten Stufe (Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel), der zweiten Stufe (die Ebene, als Inbegriff aller Punkte und Strahlen, und das Strahlenbündel) und der dritten Stufe (der Raum). Demgemäss unterscheidet der zweite Theil Wesen der zweiten und dritten Stufe, d. h. solche, die als Theile einer Ebene und solche, die als Theile des Raumes existiren; zu den letzteren gehören wir Menschen. Fortschreitend wird nun ein *Grundgebilde der vierten Stufe*, das All, angenommen, in welchem die



zahlentheoretisch-combinatorischen Untersuchungen schuldig bleibt, ist folgender: wir erfahren nirgends, wie viele magische Anordnungen der  $p^n$  Elemente möglich sind, beziehungsweise ob man sich theoretisch darüber Gewissheit verschaffen kann, dass man wirklich alle möglichen Anordnungen gebildet hat. In der Hervorhebung dieser Lücke soll keine Bemängelung der interessanten uns vorliegenden Schrift vorhanden sein; wir beabsichtigen vielmehr nur in erster Linie den Verfasser derselben auf das soeben ausgesprochene muthmasslich recht schwierige, seiner Aufmerksamkeit nicht unwürdige Problem hinzuweisen. Seine durch jahrelange Beschäftigung mit dem Gegenstande erworbene Gewandtheit dürfte ihn gerade besonders befähigen, auch diese Aufgabe zu erledigen, ohne welche die Untersuchung nicht abgeschlossen ist, so wenig als es genügt, irgend eine Gleichung — sei sie bestimmt oder unbestimmt — auflösen zu können, ohne den Beweis zu liefern, dass man alle Wurzeln angegeben hat. Die beschränktere Aufgabe, irgendwelche magische Systeme zu bilden, löst dagegen Herr Hugel durch Abzweigung einer grossen Anzahl von Unterfällen, bei deren jedem das eigentliche magische System durch feldweise Addition von  $n$  anderen an sich nicht magischen Systemen, gebildet durch die sogenannten Componenten des Systems, hervorgebracht wird. Es ist das dem Gedanken nach eine ähnliche Methode, wie sie Sauveur 1710 der Pariser Akademie mittheilte. Herr Hugel hat sie in selbstständiger Weise nacherfunden und durch Anwendung der Namen und Zeichen der modernén Combinatorik, vor Allem also der Determinanten, dem heutigen Gedankengange näher zu bringen gewusst.

CANTOR.

---

*Principii elementari sulle probabilità eposti da G. B. Marsano, professore di matematiche nella R. Università e nel R. Istituto tecnico di Genova. Genova, Tipografia del R. Istituto Sordo-muti 1876. 153 S.*

Wenn irgend ein Capitel der Mathematik vorzugsweise dazu geeignet ist, dem Selbststudium des Anfängers überlassen zu bleiben, so ist es dasjenige, welches die elementaren Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält. Einestheils sind die in diesem Capitel zu behandelnden Aufgaben von einem ziemlich allgemein fesselnden Interesse, da es wohl Wenige giebt, welche Ungewisses nicht in Spannung erhält, in um so grösserer, wenn an das Ereigniss überdies ein unmittelbarer Vermögensvortheil oder Nachtheil, Gewinn oder Verlust sich knüpft. Anderntheils sind die Grenzen des ohne höhere Kenntnisse Erreichbaren hier ziemlich weit gesteckt und die Entwicklung des binomischen Satzes genügt, um bereits ziemlich verwickelt aussehende Fragen zu beantworten. Von diesem elementaren Standpunkte aus hat Herr Marsano den Gegenstand













LIP

PFA

—

SCH

STB

MÜL

MEL

DÜB

DOB

RBI

SCH

HAN



den uns dieser Bezeichnungen im Folgenden bedienen. Besonders erwähnenswerth sind hier noch die auf S. 130 eingeführten Bezeichnungen  $\bar{\omega}$ , und  $\delta$ ,, sowie die Schreibweise

$$0 < r \leq r',$$

- (sic!)

wo das hinzugefügte (sic!) besonders hervorheben soll, dass nicht  $\leq$ , sondern wirklich  $<$  gemeint ist. Auch durch einen passend gewählten Vergleich weiss der Verfasser oft unsere Vorstellungen zu fixiren und dem Vorgetragenen eine ungemeine Anschaulichkeit zu geben, z. B. in der zweiten Note S. 170 oder in der Note S. 303. An der ersten Stelle soll man sich nämlich eine Curve oder Fläche  $\sigma$  in irgend zwei Theile  $\alpha$  und  $\beta$  zerlegt denken, von denen jeder aus beliebig vielen einzelnen Stücken bestehen mag. Hierzu bemerkt der Verfasser in der Note: „Ist z. B.  $\sigma$  eine Kugelfläche und denken wir uns auf dieser Kugelfläche die Karte unserer Erdoberfläche aufgemalt, so können wir, wenn es uns beliebt, unter  $\alpha$  alle mit Wasser bedeckten Gebiete, andererseits unter  $\beta$  den Continent und die Inseln verstehen.“

Die Strenge und Eleganz der Neumann'schen Beweisführung zeigt sich besonders, wenn man die älteren Beweise bereits bekannter Sätze mit den von Neumann beigebrachten vergleicht: der Verfasser weiss die Sätze immer auf die Quelle zurückzuführen, aus der sie sich am einfachsten und natürlichsten ergeben, wie wir dies in dem nun folgenden Referat über den Inhalt zu constatiren mehrfach Gelegenheit haben werden.

Ueber den Inhalt sei zunächst Folgendes im Allgemeinen bemerkt. Der Verfasser unterscheidet zwei Potentiale, das Newton'sche und das logarithmische. Während der Theorie des ersteren die in der Natur vorhandene Materie zu Grunde liegt, für welche das Newton'sche Gesetz gilt, handelt die Theorie des logarithmischen Potentials bekanntlich von einer fingirten Materie von der Beschaffenheit, dass irgend zwei Massentheilchen derselben sich mit einer Kraft anziehen, die ihrer Entfernung (nicht dem Quadrat der Entfernung) umgekehrt proportional ist. Wenn

das Newton'sche Potential zweier Massentheilchen  $\mu, m$  den Werth  $\frac{\mu m}{r}$  besitzt, hat das logarithmische Potential demnach den Werth  $\mu m \log \frac{1}{r}$ .

Bei der Theorie des logarithmischen Potentials beschränkt sich der Verfasser auf die Ebene, d. h. er behandelt nur den Fall, dass jene fingirte Materie auf beliebige Weise in der Ebene, nicht im Raum vertheilt sei. Unter dieser Voraussetzung findet nämlich eine merkwürdige Analogie zwischen beiden Theorien statt, indem den meisten Sätzen der einen Theorie ein analoger der andern entspricht. Der Verfasser behandelt beide Theorien meistens neben einander und beide „mit derselben Sorgfalt“. Die 1. §. 3, in welcher die Wichtigkeit der Theorie des logarithmi-





die Constanz des Potentials betreffenden Satz (Allgemeine Lehrsätze etc., Art. 21) einen neuen Beweis giebt, der sich durch seine Einfachheit und Strenge auszeichnet. Derselbe stützt sich auf die bekannte Entwicklung des Potentials  $V = V_0 + Fr + Gr^2 + \dots$ , woraus sich der in Rede stehende Satz ohne Weiteres ergibt, unter Anwendung des vom Verfasser bei dieser Gelegenheit bewiesenen Hilfssatzes:

„Ist die Function  $f(r) = A + Br + Cr^2 + \dots$  innerhalb eines beliebig kleinen Intervalls  $r = 0 \dots r = r'$  constant, so wird sie überall constant sein, so weit die angegebene Entwicklung giltig ist.“

Darauf werden eine Reihe neuer, auch für das Folgende wichtiger allgemeiner Sätze über die extremen Werthe des Potentials innerhalb eines Gebiets entwickelt, aus denen jenes Theorem ( $C'$ ), sowohl für den Raum, als für die Ebene, schliesslich ohne Weiteres resultirt. Was den Beweis jener Sätze über die extremen Werthe des Potentials betrifft, so beruht derselbe lediglich auf dem vom Verfasser zuvor bewiesenen Satze, dass das Potential gegebener Massen in einem ausserhalb dieser Massen befindlichen Punkte weder ein Maximum, noch ein Minimum haben kann, und unterscheidet sich insofern vortheilhaft von dem Beweis, den Gauss im Art. 26 der Allgem. Lehrs. für einen speciellen Fall eines dieser Sätze gegeben hat. Der Gauss'sche Beweis benutzt nämlich diejenige geschlossene Fläche, welche durch die Gleichung  $V = \text{Const.}$  dargestellt ist, also „eine Fläche, die ebenso unbekannt ist, als das Potential selber“. Aehnlich verfährt Dirichlet (S. 134 der vom Referenten herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen über die Potentialtheorie). Neumann bemerkt hierüber in der Vorrede: „Uebrigens können solche unzulänglich determinirte Flächen in doppelter Weise auftreten, indem sie entweder die gegebene Grundlage betreffen, von welcher die Untersuchung ausgeht, oder aber im Laufe der Untersuchung als Hilfsmittel für den weiteren Fortgang derselben in Anwendung kommen. ... Offenbar sind solche ganz nebelhaft vorschwebende Flächen im zweiten Falle nicht minder unbequem, als im ersten. Denn wenn z. B. Gauss a. a. O. auf die Fläche  $V = \text{Const.}$  einen der Green'schen Sätze in Anwendung bringt, so wird man zu beachten haben, dass diese Sätze nicht ohne Weiteres auf jede beliebige Fläche anwendbar sind und dass also ihre Anwendung auf die Fläche  $V = \text{Const.}$  nicht gutgeheissen werden darf ohne eine vorhergehende Untersuchung derselben. Ja noch mehr! Ueberall, wo solche unzulänglich definirte Flächen nur als Anfangsglieder der Untersuchung auftreten, kann die in den Resultaten erzeugte Unsicherheit nachträglich durch Hinzufügung geeigneter Determinationen beseitigt werden, was offenbar nicht mehr möglich ist bei den als Operationsmittel eingeführten Flächen. ... Aus diesem Grunde habe ich in dem vorliegenden Werke die Benutzung unbekannter Flächen als eines Operationsmittels zu vermeiden und die betreffenden Gauss'schen und







einander. Es ist dies eine Methode — die einzige, die wir bis jetzt besitzen —, die zur Lösung der Fundamentalaufgaben der Elektrostatik führt, die folgendermassen lauten:

„Das äussere Problem. — Es soll ein Potential auf äussere Punkte ermittelt werden, dessen Massen auf oder innerhalb  $\sigma$  liegen und dessen Werthe auf  $\sigma$  von daselbst vorgeschriebenen Werthen  $f$  nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden.

Das innere Problem. — Es soll ein Potential auf innere Punkte gefunden werden, dessen Massen auf oder ausserhalb  $\sigma$  liegen und dessen Werthe auf  $\sigma$  von daselbst vorgeschriebenen Werthen  $f$  nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheiden.“

Auf die Methode selbst und deren Begründung kann hier nicht näher eingegangen werden. Es sei nur Folgendes bemerkt:

I. Die Lösung beruht auf den im vierten Capitel entwickelten Eigenschaften des Potentials einer Doppelbelegung und liefert das gesuchte Potential in Form einer unendlichen Reihe, zunächst als Potential einer Doppelbelegung, dessen Gesamtmasse mithin gleich Null ist; dasselbe wird aber mit Hilfe eines Green'schen Satzes sehr leicht in das Potential einer einfachen Belegung umgewandelt.

II. Die Methode ist nur auf solche geschlossene Flächen, resp. Curven anwendbar, welche überall convex oder, genauer ausgedrückt, zweiten Ranges und keine zweisternigen sind, und setzt ausserdem voraus, dass die vorgeschriebenen Werthe  $f$  auf  $\sigma$  überall stetig sind.

Unter einer Fläche zweiten Ranges versteht der Verfasser eine Fläche, die mit einer unendlich langen Geraden, welche Lage man letzterer auch zuertheilen mag, niemals mehr als zwei Stellen gemeinsam hat (wo das Wort „Stelle“ ein Continuum von Punkten bezeichnet, einerlei, ob die Zahl der darin enthaltenen Punkte endlich oder unendlich gross ist), und unter einer zweisternigen Fläche eine solche, welche zwei Punkte von solcher Lage besitzt, dass jede Tangentialebene der Fläche durch einen dieser Punkte geht.

Der Verfasser legt — wie schon von uns erwähnt — mit Recht ein grosses Gewicht darauf, dass man sich des Umfanges der Giltigkeit der Methode und damit dessen, was noch vermisst wird, klar bewusst sei. Er sagt in der Vorrede: „Die Wichtigkeit des vorliegenden Werkes besteht — falls eine solche demselben überhaupt beizumessen ist — vielleicht vorzugsweise in den darin zu Tage tretenden Lücken, resp. in der Anregung, welche durch dasselbe zur Ausfüllung dieser Lücken gegeben sein möchte. So z. B. ist die im 5. Capitel exponirte Methode des arithmetischen Mittels nur auf solche geschlossene Flächen anwendbar, welche überall convex sind. Sollte es in Zukunft gelingen (was ich lange









wo  $\varepsilon(x)$  eine positive Grösse vorstellt, welche durch Verkleinerung des Radius von  $x$  beliebig klein gemacht werden kann. Diese Bedingung soll erfüllt sein für jeden der Punkte  $g$ .

Diese Function  $W$  nennt der Verfasser die den Werthen  $f$  entsprechende kanonische Potentialfunction des Gebietes  $\mathfrak{A}$ . Liest man in jenen drei Bedingungen statt  $\mathfrak{A}$ ,  $\alpha$ ,  $x$  resp. überall  $\mathfrak{J}$ ,  $i$ ,  $\lambda$ , so erhält man die Definition der (gleichfalls eindeutig bestimmten) den Werthen  $f$  entsprechenden kanonischen Potentialfunction  $W$  oder  $W_i$  des Gebietes  $\mathfrak{J}$ .

2. Es werden die allgemeinen Eigenschaften der kanonischen Potentialfunctionen aufgestellt, von denen die erste eben die ist, dass sie, wenn die  $f$  gegeben sind, eindeutig bestimmt sind.

3. Was die wirkliche Berechnung der kanonischen Potentialfunction für vorgeschriebene Grenzwerte  $f$  betrifft, so wird hervorgehoben, dass dieselbe für stetige  $f$  offenbar gleichbedeutend sei mit der Lösung des im fünften Capitel behandelten äusseren und inneren Problems. Darauf zeigt der Verfasser aber noch, dass, wenn irgend eine Methode bekannt ist zur Bildung der kanonischen Potentialfunctionen für stetige Grenzwerte, man dieselben auch für solche Grenzwerte zu bilden vermag, die mit beliebig vielen Differenzpunkten behaftet sind.

In der Einleitung zum neunten Capitel setzt der Verfasser an einer bestimmten Aufgabe die Murphy'sche Methode auseinander, die Probleme der Elektrostatik für ein System von beliebig vielen Conductoren auf die entsprechenden Probleme zu reduciren, bei denen nur Ein Conductor auftritt, und bemerkt dazu, dass diese Methode auf zwei Sätzen beruhe, welche nur für den Raum, nicht für die Ebene gelten, dass mithin die Murphy'sche Methode auf die Probleme der Ebene nicht anwendbar sei. Darauf theilt der Verfasser eine etwas andere Methode mit, welche ebenso auf die Probleme der Ebene, wie des Raumes anwendbar ist (weshalb er sich auf die Ebene beschränkt), indem er — worauf es hier offenbar nur ankommt — folgende Aufgabe löst:

Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei geschlossene Curven und auf denselben irgendwelche Grenzwerte vorgeschrieben: diejenige kanonische Potentialfunction der von  $\alpha$  und  $\beta$  begrenzten Fläche zu finden, welche auf  $\alpha$  und  $\beta$  jene vorgeschriebenen Werthe besitzt.

Diese Aufgabe wird zunächst für den Fall gelöst, dass jede dieser beiden Curven ganz ausserhalb der andern liegt, und darauf — nach zwei verschiedenen Methoden sogar — auch für den Fall, dass  $\alpha$  und  $\beta$  sich schneiden. Es sei über diese Methoden nur bemerkt, dass sie auf der im vorhergehenden Capitel vorgetragenen Theorie der kanonischen Potentialfunctionen beruhen und dass dabei vorausgesetzt wird,



welches auf  $\sigma$  von daselbst vorgeschriebenen Werthen nur durch eine unbestimmte additive Constante sich unterscheidet.

2. Eine gegebene Masse  $M$  soll auf der Curve oder Fläche  $\sigma$  in solcher Weise ausgebreitet werden, dass das Potential dieser Belegung auf  $\sigma$  selber von gewissen daselbst vorgeschriebenen Werthen nur durch eine unbestimmte additive Constante differirt.

Endlich sei hier noch folgender Satz genannt, der insofern ein besonderes Interesse darbietet, als er einer der wenigen Sätze ist, die nur für das Newton'sche Potential im Raum, nicht für das logarithmische Potential in der Ebene gelten: „Die auf einem zur Erde abgeleiteten Conductor durch einen elektrischen Massenpunkt  $\alpha$  von der Masse  $(-1)$  inducirte Belegung ist ihrer Gesammtmasse nach stets kleiner als 1.“

Zum Schluss giebt der Verfasser eine ungemein klare Auseinandersetzung der Thomson'schen Methode der sphärischen Spiegelung und entwickelt die damit zusammenhängenden bekannten Sätze über das Newton'sche Potential im Raume, um dann zu zeigen, wie mit Hilfe jener Methode auch für das logarithmische Potential in der Ebene die analogen Sätze sich aufstellen lassen.

Nach dieser Skizzirung des überaus reichen und interessanten Inhalts führen wir die wenigen Stellen an, die wir entweder etwas anders gewünscht hätten oder denen ein offener Irrthum zu Grunde liegt.

Wir haben im Eingang als einen grossen Vorzug des Neumann'schen Werkes hervorgehoben, dass überall die Voraussetzungen und Einschränkungen genau angegeben werden, denen die aufgestellten Sätze und Formeln unterliegen. Allein wenn wir nicht irren, so hat der Verfasser die Giltigkeit einiger Sätze abhängig gemacht von Voraussetzungen, die in der That nicht erfüllt zu sein brauchen. Auf diesen Punkt sind die folgenden Ausstellungen hauptsächlich zurückzuführen.

S. 79. Der „zweite Beweis“ scheint nicht ganz correct zu sein. Derselbe müsste von der letzten Zeile auf S. 79 incl. an etwa so lauten:

Zerlegen wir das elektrische Gesamtpotential  $V$  in zwei Theile:  $V = W + \Omega$ , indem wir unter  $\Omega$  den von den Belegungen der beiden Grenzflächen des Raumes  $\mathcal{S}$  herrührenden Theil verstehen, so ist nach 8)  $W + \Omega$  constant in allen Punkten des schalenförmigen Conductors. Hieraus folgt (nach einem früheren Satze, S. 47), dass  $W$  und  $\Omega$  in jenem Gebiet einzeln constant sind. Ferner ist nach einem Green'schen Satze [(42 $\alpha$ ), S. 21]:

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial N} d\sigma = -2\omega M,$$

wo  $N$  die äussere Normale der Fläche  $s$  und  $M$  die Summe der Massen jener beiden Belegungen der Grenzfläche  $\mathcal{S}$  bezeichnet. In dieser Formel ist nun aber die linke Seite  $= 0$ , weil  $\Omega$  in allen Theilen des scha-



Raume darstellen und weil sie der Zunahme der Fallbeschleunigung nicht Rechnung tragen!

Den allgemeinen Ausdruck für die Bewegung, welche mit constanter Beschleunigung vor sich geht, ein unvollkommenes Naturgesetz zu nennen, weil es Fälle giebt, auf die er nicht passt, das nenne ich denn doch die Begriffe völlig verwirren und eine Wissenschaft, welche gerade durch die Umsicht ihrer Methode und die Sicherheit ihrer Forschungsergebnisse sich vor anderen den Namen der exacten erworben hat, in heillosen Weise discreditiren.

Bezüglich des übrigen Inhalts muss ich mich auf Erwähnung einiger der hauptsächlichsten und gefährlichsten Verstösse beschränken.

S. 9, § 12 wird defnirt: „Elasticität ist die Eigenschaft eines Körpers, dass er bei Einwirkung äusserer Kräfte eine Veränderung in der Lage seiner Theile erfährt, bei nachlassendem Drucke oder Zuge aber seine Gestalt wieder herstellt.“ Nachdem dann erwähnt ist, dass es vollkommen elastische Körper nicht giebt, heisst es weiter: „Die vollkommenste Elasticität zeigen die luftförmigen Körper.“

Diese Körper stellen also am vollkommensten ihre Gestalt wieder her?

Im Sinne der Definition (die nur auf feste Körper passt) sind die Gase und Flüssigkeiten gar nicht elastisch. Wird ihnen aber Elasticität zugeschrieben, insofern sie ihr Volumen wieder herstellen, dann sind sie offenbar beide gleich und zwar vollkommen elastisch.

S. 17, § 18 heisst es: Die Kräfte, welche Bewegung hervorbringen, können momentan oder continuirlich wirken. Als eine momentan wirkende Kraft können wir den Stoss ansehen.

Eine momentan, d. h. eine unendlich kleine Zeit hindurch wirkende Kraft kann einem Körper eine endliche Geschwindigkeit weder verleihen, noch entziehen, was doch beim Stoss geschieht. Die Momentankräfte haben lediglich die Bedeutung von Fictionen, welche man nach der von Galilei gegebenen Anleitung zum Zwecke theoretischer Speculation macht, um sie schliesslich (durch den Uebergang zur Grenze) wieder aufzugeben. Eine reelle Bedeutung kommt ihnen nicht zu; vielmehr ist es von höchster Wichtigkeit, den Schüler zu belehren, dass jede endliche Wirkung nur in endlicher Zeit zu Stande kommt.

S. 30, § 24 versteigt sich der Verfasser zu einer Berechnung des Winddrucks auf schief entgegenstehende Flächen, welche er nach zwei anderen unglücklich gewählten als Beispiel zur Erläuterung der Kräftezerlegung anführt.

Dabei übersieht er, dass mit dem Neigungswinkel ( $\alpha$ ) der Flügelsebene gegen die Axe sich zugleich auch die auf die Flügel treffende Luftmasse ändert und in seinem Sinne die betreffende trigonometrische



S. 231 wird in einer Anmerkung versprochen, die Abmessung des Leitungswiderstandes in §§ 152 und 153 zu lehren, dieses Versprechen aber nicht gehalten.

S. 245 steht durchschossen der Lehrsatz: „Die Stärke zweier Ströme ist der Tangente des Ablenkungswinkels proportional.“

S. 248 steht der durchschossene Satz: „Man erhält daher die grösste Wirkung, wenn der Leitungswiderstand in der Batterie gleich dem Leitungswiderstande im Schliessungsbogen ist.“

In dieser Allgemeinheit ausgesprochen ist der Satz falsch, weil er dem Ohm'schen Gesetze widerspricht.

S. 257 meint der Verfasser, dass über die praktische Anwendung des Hughes'schen Drucktelegraphen erst fortgesetzter Gebrauch entscheiden werde. Im Jahre 1878?

S. 281 wird noch immer gelehrt, dass durch 16 Schwingungen in der Secunde ein Ton zu Stande komme.

S. 284 wird als Grundton eines Klanges nicht der tiefste, sondern der stärkste definirt; die übrigen Töne werden Nebentöne genannt.

Auf welche Autorität stützt sich hier der Verfasser? Ich dünkte, dass hier Helmholtz massgebend sein sollte und nicht Koppe-Dahl.

S. 321 findet sich der Heliostat erwähnt als Planspiegel, dem durch ein Uhrwerk oder die Hand eine solche Bewegung ertheilt wird, dass er die Strahlen der Sonne immer in der nämlichen Richtung reflectirt.

Der Handheliostat dürfte dieses wohl nie leisten, bei dem automatisch wirkenden ist die Stellung des Spiegels das Interessante und zu Erklärende.

S. 366 ist als Anmerkung zu dem Titel „Polarisation und doppelte Brechung“ Folgendes zu lesen: „Wir handeln hiervon nur kurz, da kaum irgend eine Erscheinung im grossen Haushalte der Natur oder im gewöhnlichen bürgerlichen Leben bekannt ist, welche auf der Polarisation oder der doppelten Brechung des Lichtes beruhte.“

Es geht wahrhaftig Nichts über diese Gemüthlichkeit „im gewöhnlichen bürgerlichen Leben“.

Wir verlangen in Anfangsgründen der Physik keine weitläufige Behandlung der Polarisation und doppelten Brechung, aber ein solches „Weil“ weisen wir zurück, weil es unwahr ist. In unser gewöhnliches bürgerliches Leben gehört beispielsweise das Saccharimeter.

S. 379 steht die (durch ihre Präcision ausgezeichnete) durchschossene Erklärung: „Ist der Gegenstand von der Linse sehr weit entfernt, so kommt das Bild nahe an den Brennpunkt zu liegen und ist verkleinert. — Befindet sich dagegen der Gegenstand nahe am Brennpunkte (jedoch













- GRASHOF, F., Theorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik. 2. Aufl. Berlin, Gärtner. 9 Mk.
- HOFMANN, F., Grundriss der mathematischen Geographie. 2. Aufl. Bayreuth, Grau'sche Buchh. 1 Mk. 50 Pf.
- Arbeiten, astronomisch-geodätische, im Jahre 1877. Bestimmung der Längendifferenzen zwischen Berlin und Paris, Berlin und Bonn, Bonn und Paris. Berlin, Schlesser. 9 Mk.
- SCHAUB, F., Nautische Astronomie. 3. Aufl. Wien, Gerold. 6 Mk.

### Physik und Meteorologie.

- HANKEL, W. G., Elektrische Untersuchungen. 13. Abhandlg. Leipzig, Hirzel. 2 Mk.
- SCHRÖDER, E., Anleitung zum Gebrauch physikalischer Apparate. 2. Aufl. Magdeburg, Kroening's Söhne. 1 Mk.
- SCHULZE, R., Die physikalischen Kräfte im Dienste der Gewerbe, der Kunst und Wissenschaft. Frei nach A. GUILLEMIN. 1. Lief. Leipzig, Froberg. 1 Mk.
- KOHLFÜRST, L., Ueber elektrische Distanzsignale für Eisenbahnen. Prag, Dominicus. 1 Mk. 60 Pf.



handlung gereicht. Herr Rothlauf ist seiner Aufgabe weit unbefangener gegenübergetreten, als wenn er die Gesamtheit der Vorarbeiten gekannt hätte, welche in ähnlicher Richtung vorgenommen worden sind, und dieser Unbefangenheit verdanken wir vielleicht manche richtigere Erklärung. Wir erwähnen beispielsweise die Uebersetzung (S. 29) der berüchtigten Stelle von der vollkommenen Zahl. Sie weicht vollständig von der durch Martin gegebenen Uebersetzung ab und führt zu einer durchaus verschiedenen Zahl. Wir sind versucht, in der R.'schen Uebersetzung den richtigeren Sinn zu erkennen, wenn auch die Schwierigkeit der Frage eine rasche Entscheidung ohne gründliche eigene Untersuchung, zu welcher uns gegenwärtig die Zeit fehlt, nicht zulässt. In der Erklärung eines Satzes stimmen übrigens Martin und R. überein, die dadurch wohl als gesichert erscheinen dürfte. „Die Diagonale eines Quadrates mit der Seite 5“, heisst es, „die rational ist wenn 1, irrational wenn 2 abgeht.“ Die Meinung sei die, dass  $2 \cdot 5^2 - 1 = 49$  eine Quadratzahl,  $2 \cdot 5^2 - 2 = 48$  keine Quadratzahl ist. Aus dieser Stelle geht aber hervor, dass Plato den Näherungswerth  $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ , über welchen wir uns S. 89 der hist.-lit. Abthlg. dieses Bandes ausgesprochen haben, gekannt haben kann, dass jedenfalls zwischen der dort angeführten Proklusstelle und pag. 546 des Staates ein Zusammenhang anzunehmen ist. Ob Herr Rothlauf (S. 25) in der Erläuterung einer Stelle des Theaetet pag. 147, wo er irrationale Kubikwurzeln erkennen will, ebenso glücklich getroffen hat, ist uns nicht ganz wahrscheinlich, und auch gegen einige andere Erklärungen (S. 51, S. 52 Citat 6, S. 64) ist uns eine Polemik denkbar, auf welche wir uns aber hier nicht einlassen möchten. Wir wollen vielmehr durch diese Aeusserungen nur einestheils zeigen, dass wir die Schrift mehr als nur einmal, oder gar als nur flüchtig durchlesen haben, und andernteils dass wir die Schwierigkeit mancher behandelten Gegenstände vollauf anerkennen. Im Allgemeinen dürfte der Leser durch die mündgerechten deutschen Uebersetzungen des Verfassers sehr angenehm berührt werden und der ganzen Schrift den doppelten Eindruck entnehmen, dass Plato in der That, auch wenn nicht übermässig viele Erfindungen ihm unmittelbar zugeschrieben werden, eine hohe Rolle in der Geschichte der griechischen Mathematik gespielt hat und dass Herr Rothlauf mit den platonischen Schriften so wohl vertraut ist, dass man ihm nur dafür danken kann, die mühselige Arbeit dieser Zusammenstellung auf sich genommen zu haben, welche den meisten mathematischen Benutzern schon durch den Umstand sympathischer als die von Blass sein wird, dass Letzterer sich allenthalben mit dem Abdrucke des griechischen Textes begnügt und dadurch ebenso, wie durch die lateinische Sprache der ganzen Abhandlung sich mehr an Philologen gewandt zu haben scheint.







































































645. Solution d'un problème de Beha-Eddin sur l'analyse indéterminée. Ed. Lucas. N. ann. math. XXV. 359.
646. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation  $x(x-1)(2x-1)=6y^2$ . Moret-Blanc. N. ann. math. XXV. 46.
647. Sur le système des équations  $x^2-6y^2=u^2$ .  $x^2-6y^2=v^2$ . Ed. Lucas. N. ann. math. XXV. 46.
648. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation  $x^2=y^2+1$ . Moret-Blanc. N. ann. math. XXV. 44.
649. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation  $(x-1)^2=x^2+1$ . Mey. N. ann. math. XXV, 545.
- Vergl. Formen.

## Zinseszinsrechnung.

650. Ueber einen Satz aus der Theorie der Leibrenten. Malmsten. Crelle LXXVIII. 245.

Fig. 7.

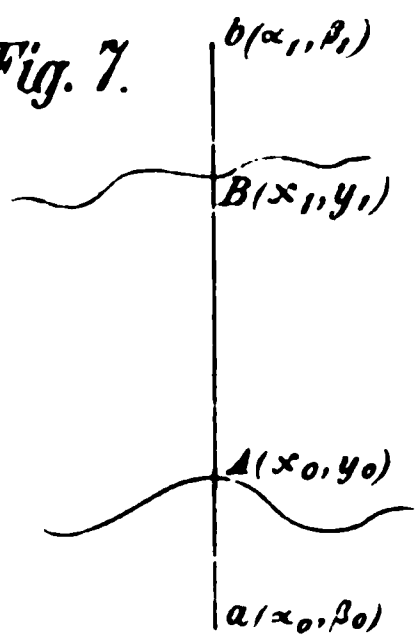


Fig. 9.

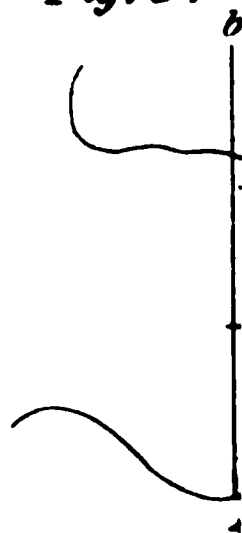


Fig. 8.

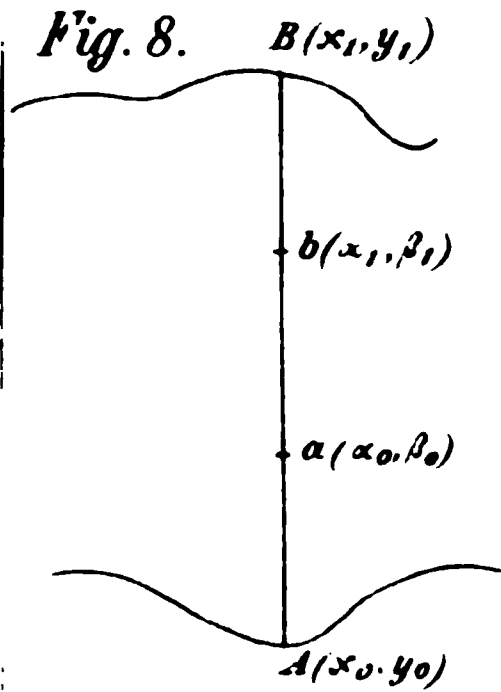


Fig. 11.

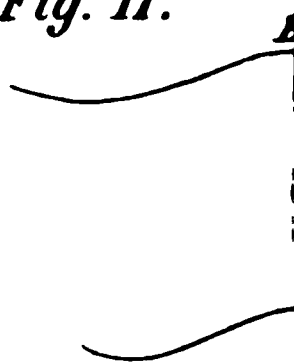


Fig. 15.

